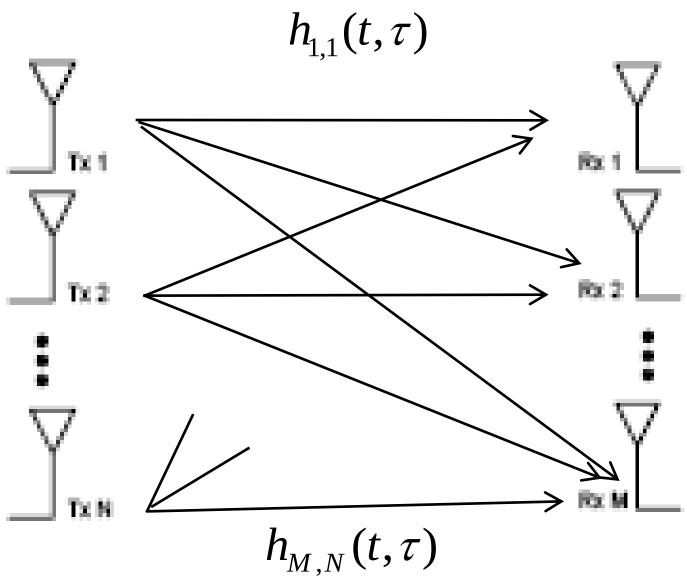
Tecniche MIMO (Multiple Input Multiple Output)

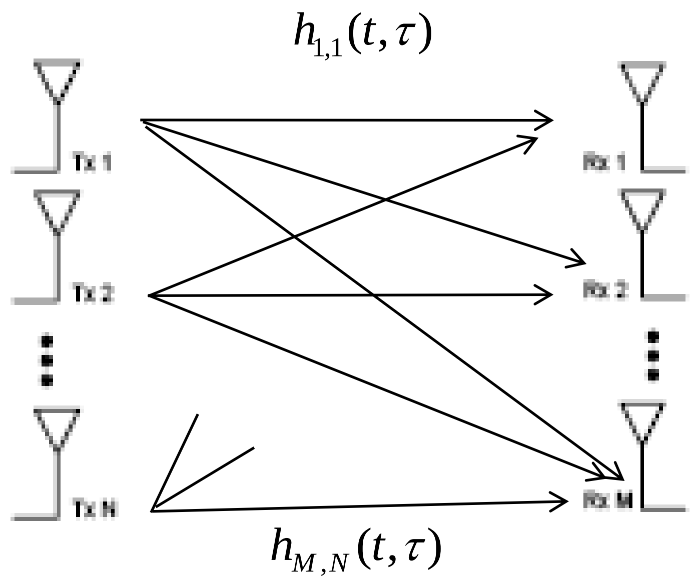
Canale MIMO: definizioni



N antenne in trasmissione
M antenne in ricezione

Per ogni collegamento tra l'antenna j in TX e l'antenna i in ricezione, il canale affetto da fading può essere modellizzato come sistema lineare caratterizzato dalla risposta impulsiva $h_{i,j}(t,\tau)$

Canale MIMO: definizioni



$$h_{i,j}(t,\tau)$$

Risposta all'istante di tempo t del canale ad un impulso unitario trasmesso dall'antenna j , τ unità di tempo prima di essere ricevuto dall'antenna i.

Dominio dello spazio

Dominio del tempo

Dominio della frequenza

Canale MIMO: definizioni

<u>Ipotesi:</u> canale non selettivo in frequenza (intervallo di simbolo T_S > delay spread) e quasi statico (ossia statico solo su L intervalli di simbolo T_S)

⇓

All'interno del blocco trasmissivo LT_S, per ogni collegamento (i,j), il canale è un sistema LTI (Linear Time Invariant) con coefficienti di canale $h_{i,j}$

⇓

Il sistema può essere rappresentato dal seguente modello tempo discreto

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & . & . & . & h_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ h_{M,1} & . & . & . & h_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ . \\ . \\ . \\ n_N \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{Hx} + \mathbf{n}$$

Rumore AWGN ⇒ n_i sono variabili aleatorie gaussiane complesse, scorrelate tra loro, a media nulla e varianza σ_n^2

Canale MIMO: definizioni

y è il vettore dei simboli ricevuti dalle M antenne in RX
x il vettore dei simboli trasmessi dalle N antenne in TX
$\mathbf{H}$ è la matrice (MxN) dei guadagni di canale
Si assume una banda B e un rumore AWGN con media zero e matrice di covazianza $\sigma_n^2 \mathbf{I_M}$ (è una matrice identità perché le componenti di rumore sui vari cammini sono scorrelati) dove tipicamente $\sigma_n^2 = BN_0$, essendo N_0 la densità spettrale del rumore AWGN.
Sia ρ il rapporto segnale-rumore medio per antenna in ricezione a guadagno di canale unitario e P la potenza totale trasmessa, allora $P / \sigma_n^2 = \rho$
Se assumiamo, per semplicità, che la potenza di rumore sia unitaria, allora ρ coincide con la potenza trasmessa.
Il limite sulla potenza trasmessa impone che:

$$\sum_{i=1}^{N} E[x_i x_i^*] = \rho \quad \text{ossia} \quad \mathrm{Tr}(\mathbf{R}_x) = \rho$$

dove $\mathbf{R}_x$ è la matrice di covarianza dell'ingresso del canale MIMO.

Canale MIMO: definizioni

Possibili ipotesi su $\mathbf{H}$

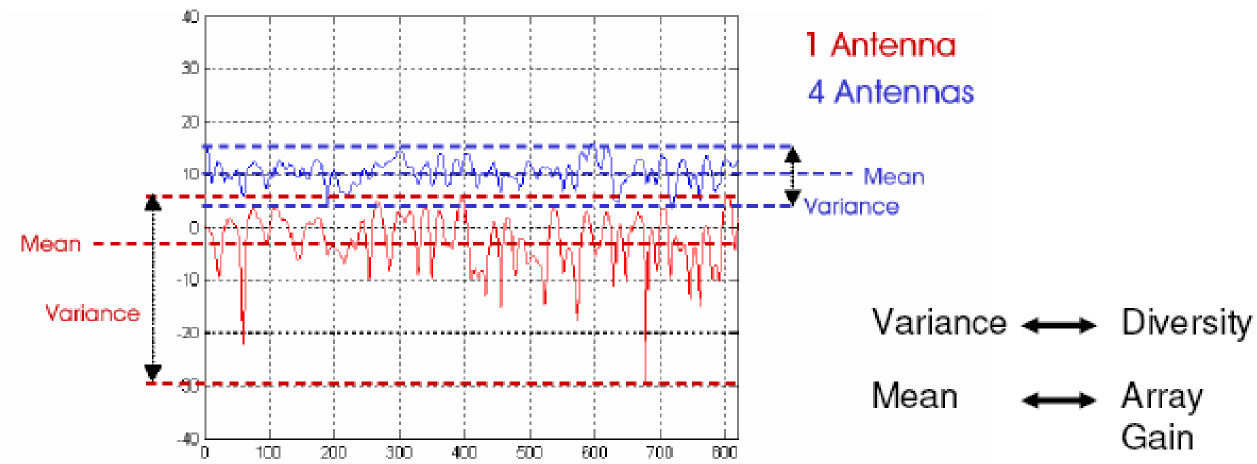
Channel Side Information at the Receiver (CSIR) spesso è assunto noto in quanto è possibile ottenere una stima sufficientemente buona dei guadagni di canale al ricevitore tramite dei segnali pilota inseriti nella trama trasmessa

Channel Side Information at the Transmitter (CSIT) può essere disponibile se è presente un canale di feedback o in sistemi con TDD applicando il principio di reciprocità

Quando il canale non è noto né al TX né al RX, si assume che $h_{i,j}$ siano v.a. Gaussiane la cui parte reale e immaginaria sono v.a. i.i.d. a media nulla e stessa varianza unitaria.

Guadagni ottenibili dall'uso di antenne multiple al TX e RX

Segnale ricevuto assumendo 1 o 4 elementi di antenna in ricezione



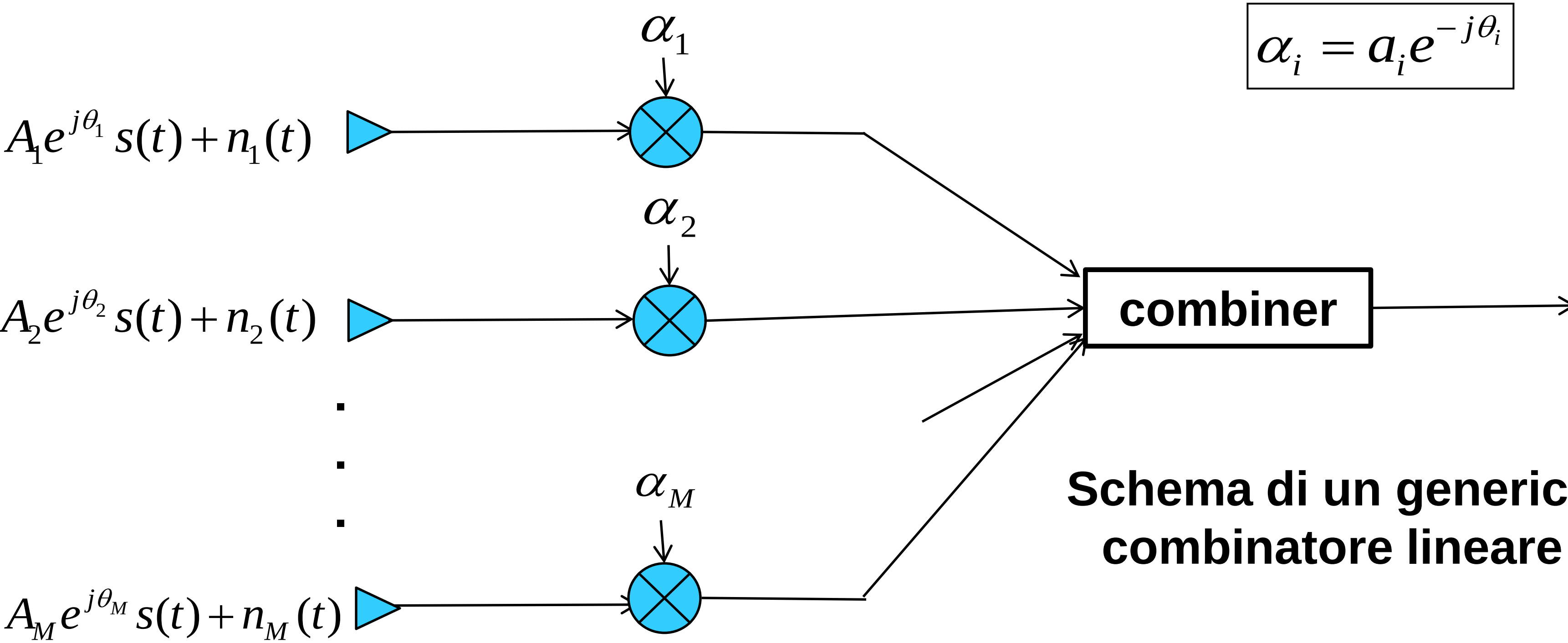
1) La riduzione nella varianza del segnale ricevuto si traduce in una maggiore affidabilità (spesso misurate in minore BER) e/o minore potenza trasmessa. Questo è ciò che si chiama **guadagno di diversità**
2) L'aumento della media del segnale ricevuto con 4 antenne è ciò che viene chiamato g**uadagno di array**
3) Inoltre, se usate opportunamente, le antenne multiple possono portare ad una maggiore capacità ossia maggiori velocità di trasmissione per utente o un numero maggiore di utenti per collegamento. Questo è ciò che si chiama **guadagno di multiplazione**

Guadagni

Esempio: **antenne multiple in ricezione**

Le diverse antenne del ricevitore (opportunamente spaziate), ricevono delle repliche **indipendenti** del segnale trasmesso. Il ricevitore le "rifasa" e combina in modo opportuno (coherent combining).

$$\boxed{\alpha_i = a_i e^{-j\theta_i}}$$



Schema di un generico combinatore lineare

Guadagno di Array

E' definito come l'aumento del valore medio del SNR all'uscita del combinatore rispetto alla media dell'SNR sul singolo ramo d'antenna:

$$G_{array} = \frac{\gamma_{\Sigma}}{\gamma_i}$$

Questo guadagno deriva dalla combinazione COERENTE di più segnali e si ha anche se <u>non è presente multipath</u>!

Guadagno di Array

Esempio: **antenne multiple in ricezione**

Indichiamo con M il numero di antenne in ricezione.

<u>Caso di non presenza di fading:</u> $A_i = \sqrt{E_S}$ dove E_S è l'energia per simbolo del segnale trasmesso. Assumendo la stessa densità spettrale di potenza di rumore $N_0/2$ su ogni ramo, allora su ogni ramo di ricezione osservo lo stesso SNR ⇒ $\gamma_i = \gamma = E_S/N_0$

Scegliendo $a_i = a$ (stesso peso a tutti rami), l'SNR totale:

$$\gamma_\Sigma = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} a_i A_i\right)^2}{N_0 \sum_{i=1}^{M} a_i^2} = \frac{E_S}{N_0}\frac{(Ma)^2}{Ma^2} = ME_S/N_0 = M\gamma$$

M-volte maggiore dell'SNR sul singolo ramo

<u>Con M antenne in ricezione, il massimo guadagno di array è M</u>

Guadagno di Diversità

Deriva dal fatto che l'SNR all'uscita del combinatore ha una distribuzione statistica più "favorevole" rispetto al caso di un singolo cammino e questo di traduce in una pendenza delle curve di BER rispetto all'SNR maggiore del caso in cui non ci sia un guadagno di diversità.

Senza guadagno di diversità, tipicamente la BER decresce molto lentamente al crescere dell'SNR, con una velocità di 1/SNR. Per esempio:

schema	BER per alti SNR
BPSK coerente	1/4SNR
QPSK coerente	1/2SNR
16QAM coerente	5/2SNR

Questo guadagno richiede che sia presente multipath e che i cammini tra il trasmettitore e le diverse antenne in ricezione possano considerarsi indipendenti.

Guadagno di Diversità

Denotiamo con γ_Σ il rapporto segnale rumore all'uscita del combinatore in ricezione

Espressione generica della probabilità d'errore media in presenza di diversità

$$\overline{P_e} = \int_0^\infty p_e(\gamma)\, p_{\gamma_\Sigma}(\gamma)\, d\gamma$$

$p_e(\gamma)$ È la probabilità d'errore in funzione dell'SNR istantaneo per lo specifico schema di modulazione.
Es. BPSK $p_e(\gamma) = Q(\sqrt{2\gamma})$

$p_{\gamma_\Sigma}(\gamma)$ È la funzione densità di probabilità relativa alla distribuzione statistica del SNR dopo la combinazione

Guadagno di Diversità

Per alcuni schemi di diversità la probabilità d'errore media ha, per alti valori di SNR, un'espressione del tipo:

$$\overline{P_e} = c\bar{\gamma}^{-d}$$

La costante c è relativa allo specifico schema di modulazione e codifica e $\bar{\gamma}$ è l'SNR medio per ramo.

$$d = -\left(\lim_{\bar{\gamma} \to \infty} \frac{\log \overline{P_e}(\bar{\gamma})}{\log \bar{\gamma}} \right)$$

è detto **ordine di diversità** e di fatto indica la pendenza della curva di BER in funzione dell'SNR.

Esempio: antenne multiple in ricezione

Richiami:

$$P_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = p(\gamma_\Sigma \leq \gamma)$$

È la funzione di distribuzione cumulativa (CDF, Cumulative Distribution Function) del rapporto segnale rumore all'uscita del combinatore in ricezione, che abbiamo denotato con γ_Σ .
La CDF è legata alla funzione di densità di probabilità dalla seguente relazione:

$$p_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = \frac{dP_{\gamma_\Sigma}(\gamma)}{d\gamma}$$

Esempio: antenne multiple in ricezione

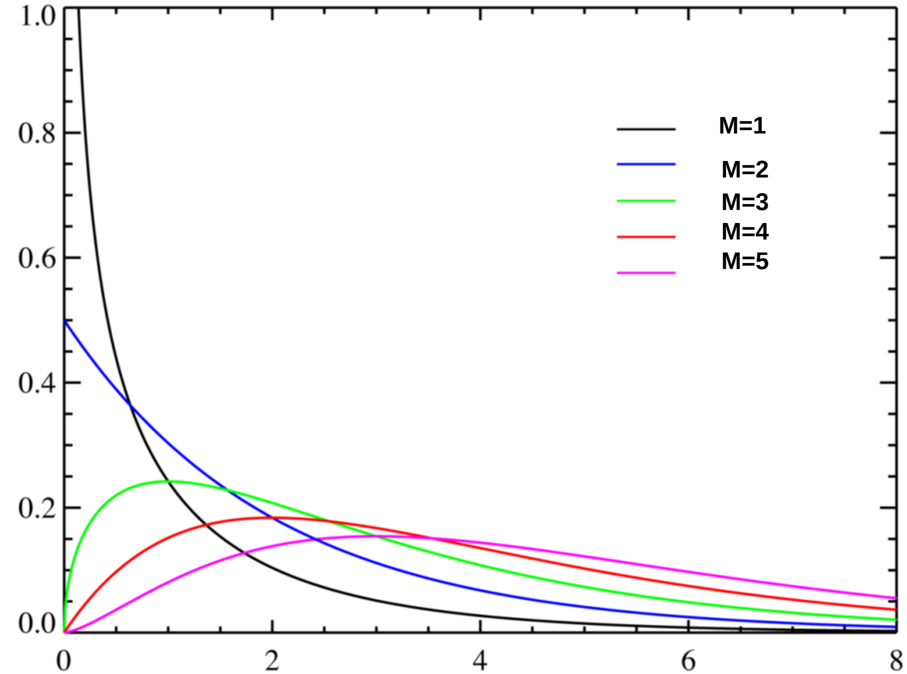
Se l'SNR dopo il combinatore si potesse scrivere come:

$$\gamma_\Sigma = \alpha\gamma = (\sum_{l=1}^{M} |h_l|^2)\gamma$$

dove h_l sono variabili aleatorie Gaussiane complesse, con parte reale e immaginaria a media nulla e stessa varianza (il modulo è distribuito alla Rayleigh)

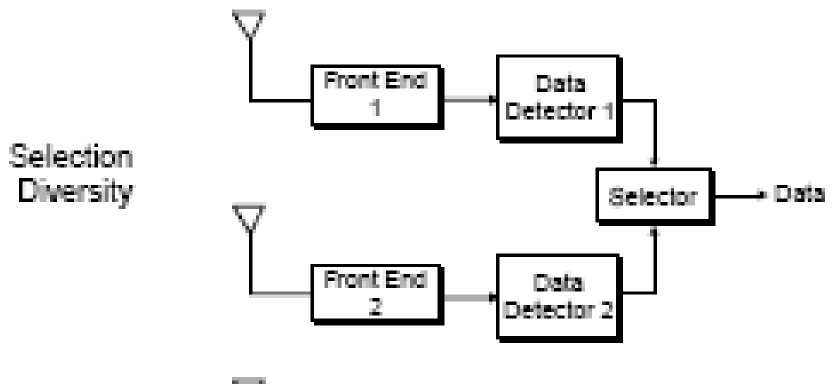
α è la somma di 2M v.a. Gaussiane reali indipendenti ed ha una distribuzione Chi-quadro con 2M gradi di libertà la cui densità è data da:

$$p_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = \frac{1}{(L-1)!}\gamma^{M-1}e^{-\gamma} \qquad \gamma \geq 0$$



Esempio: antenne multiple in ricezione

Selection Combining: degli M segnali ricevuti, si seleziona il più “forte”.



$$P_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = p(\gamma_\Sigma < \gamma) = p(\max[\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_M] < \gamma) = \prod_{i=1}^{M} p(\gamma_i < \gamma)$$

Funzione di distribuzione cumulativa (cdf) di γ_Σ

Si assumano M rami scorrelati con fading alla Rayleigh

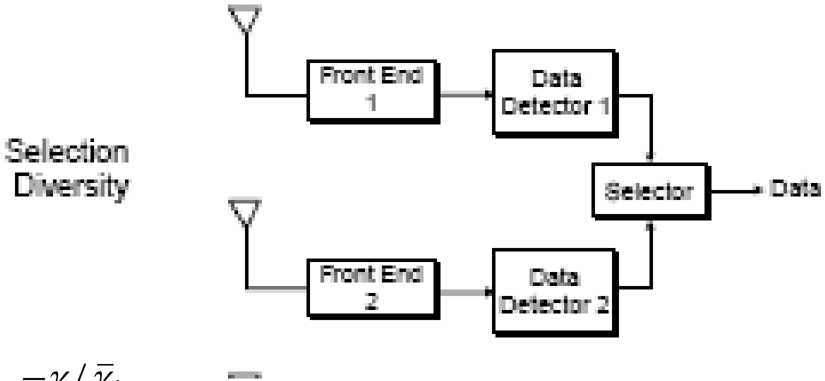
L’SNR istantaneo sul ramo *i* è (con stessa potenza di rumore N_0 su ogni ramo)

$$\gamma_i = \frac{A_i^2}{N_0} \Rightarrow p(\gamma_i) = \frac{1}{\bar{\gamma}_i} e^{-\gamma_i / \bar{\gamma}_i}$$

Distribuzione esponenziale

Esempio: antenne multiple in ricezione

Selection Combining



$$p(\gamma_i < \gamma) = 1 - e^{-\gamma/\bar{\gamma}_i}$$

Se l'SNR medio è lo stesso su tutti i rami $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}$

$$P_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = \left[1 - e^{-\gamma/\bar{\gamma}}\right]^M$$

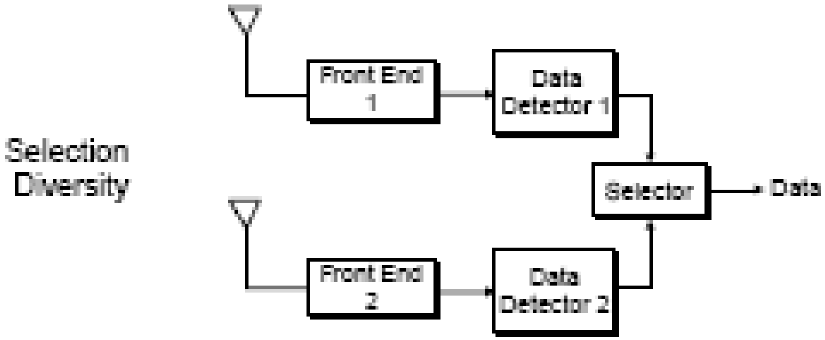
E differenziando rispetto a γ si ottiene la distribuzione di γ_Σ

$$\boxed{p_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = \frac{M}{\bar{\lambda}}\left[1 - e^{-\gamma/\bar{\gamma}}\right]^{M-1} e^{-\gamma/\bar{\gamma}}}$$

Esempio: antenne multiple in ricezione

Selection Combining

Guadagno di array



$$\bar{\gamma}_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \gamma p_{\gamma_{\Sigma}}(\gamma) d\gamma = \int_0^{\infty} \frac{\gamma M}{\bar{\gamma}} [1 - e^{-\gamma/\bar{\gamma}}]^{M-1} e^{-\gamma/\bar{\gamma}}$$

$$= \bar{\gamma} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{i}$$

Cresce con M, ma NON LINEARMENTE

Il maggiore guadagno si ottiene tra il caso M=1 e M=2

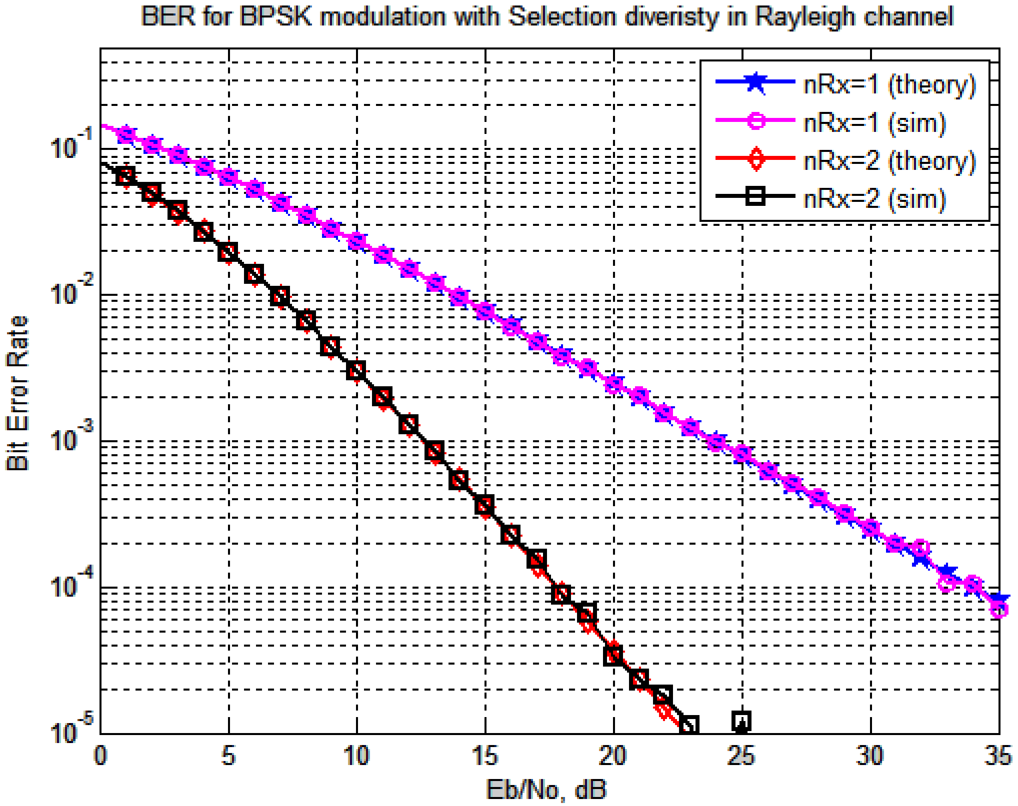
Crescere ulteriormente M non dà una significativa crescita di guadagno di array

Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

<u>Selection Combining</u>

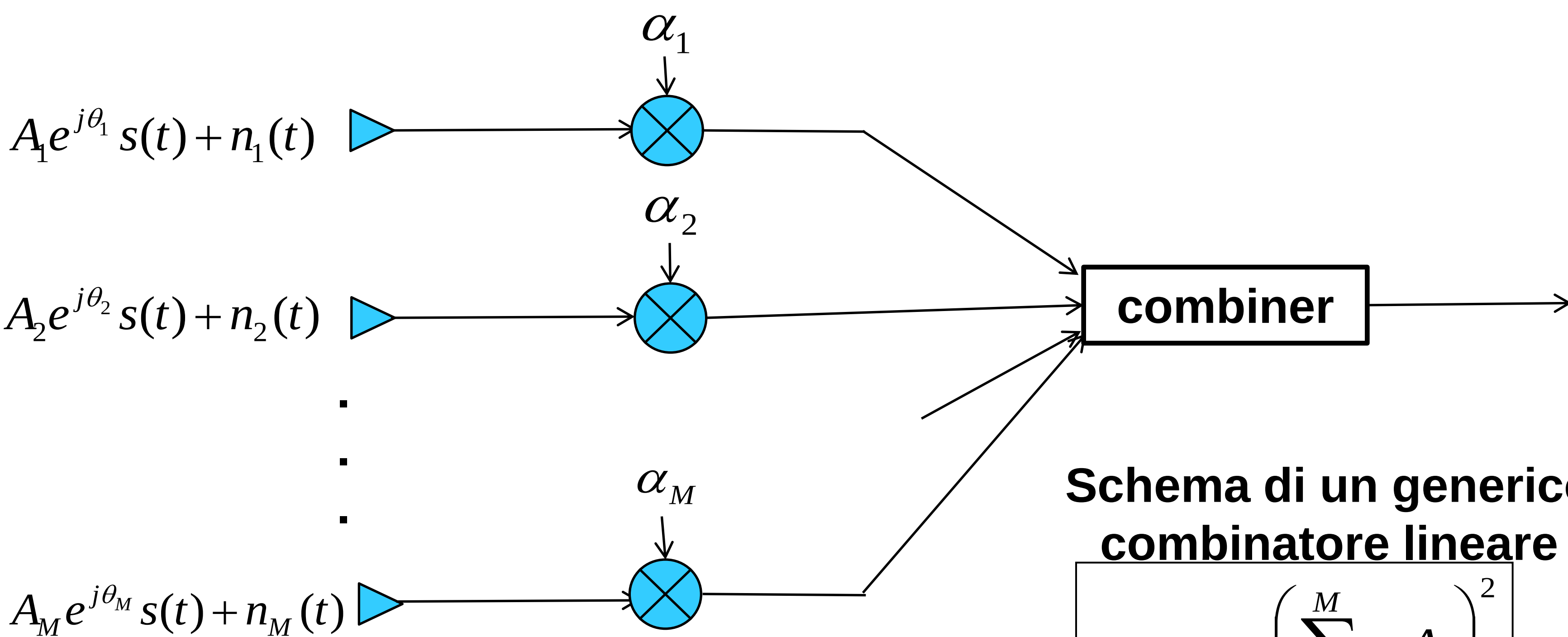
Guadagno di diversità non è facilmente calcolabile in forma chiusa. Si mostrano delle curve ottenute con delle simulazioni



Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

Linear Combining



Schema di un generico combinatore lineare

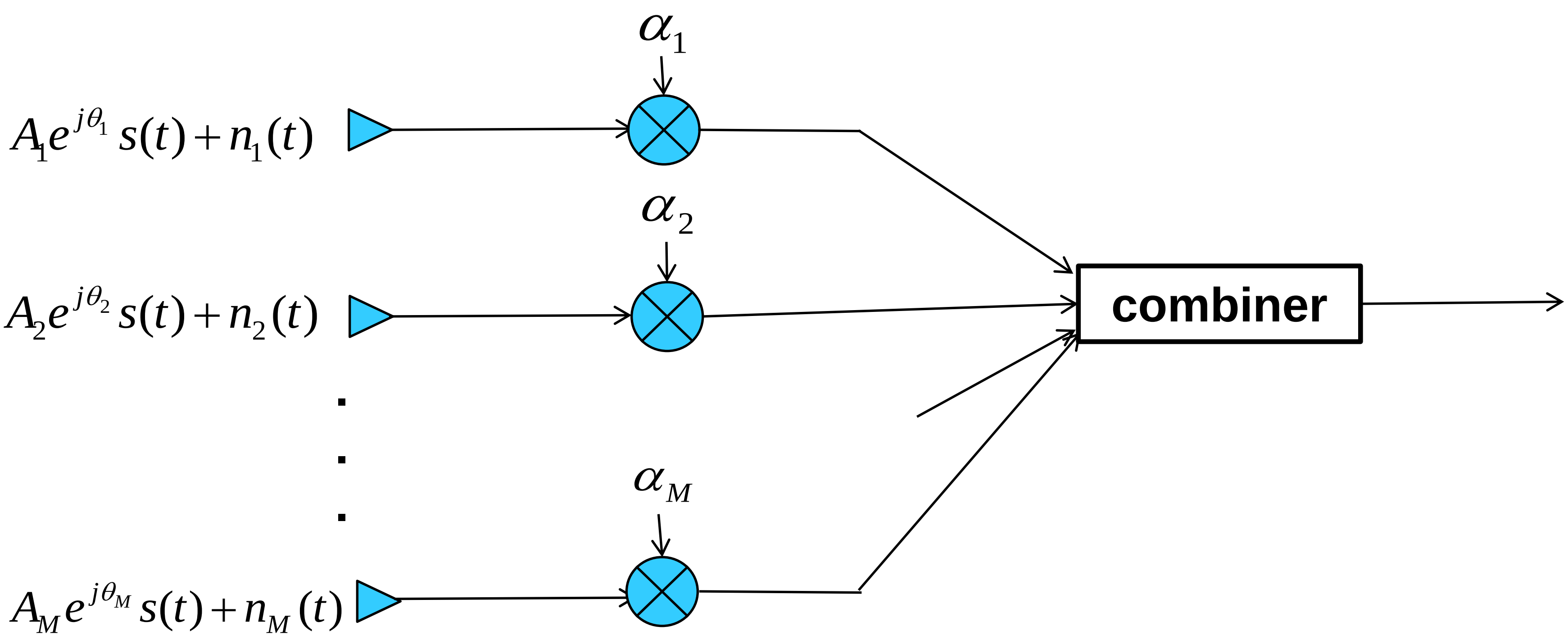
$$\boxed{\alpha_i = a_i e^{-j\theta_i}}$$

$$\gamma_\Sigma = \frac{1}{N_0} \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} a_i A_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{M} a_i^2}$$

Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

Maximum Ratio Combining (MRC)



$$\alpha_i = a_i e^{-j\theta_i}$$

a_i vengono scelte per massimizzare γ_Σ

Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

Maximum Ratio Combining (MRC)

Per trovare i coefficienti ottimi si usa la disugualianza di Cauchy-Schwartz:

$$\left(\sum_{i=1}^{M} c_i d_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{M} c_i^2 \sum_{i=1}^{M} d_i^2$$

L'uguaglianza si ha per $c_i = d_i$

Se definisco: $c_i = a_i \sqrt{N_0} \qquad d_i = A_i / \sqrt{N_0}$

$$\gamma_\Sigma = \max_{a_i} \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} a_i A_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{M} a_i^2 N_0} \le \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} a_i^2 N_0\right)\left(\sum_{i=1}^{M} A_i^2 / N_0\right)}{\sum_{i=1}^{M} a_i^2 N_0} = \left(\sum_{i=1}^{M} A_i^2 / N_0\right) = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i$$

Scegliendo a_i tale che $c_i = d_i$ $\Rightarrow$ $a_i = \dfrac{A_i}{N_0}$

$$\gamma_\Sigma = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} a_i A_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{M} a_i^2 N_0} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} A_i^2 / N_0\right)^2}{\sum_{i=1}^{M} A_i^2 / N_0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} A_i^2 / N_0 = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i$$

Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

Maximum Ratio Combining (MRC)

Come è intuitivo, il criterio MRC dà "maggior peso" ai rami con maggiore SNR

$$\gamma_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i$$

sul guadagno di diversità

La distribuzione statistica, per i.i.d fading alla Rayleigh è una χ^2 Con 2M gradi di libertà

sul guadagno d'array

Somma degli SNR sui singoli rami

Il guadagno di array cresce LINEARMENTE con M

Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

Maximum Ratio Combining (MRC)

La probabilità d'errore media è difficile da calcolare in forma chiusa
Un limite superiore si può ottenere utilizzando:

1) la seguente approssimazione della p_e per modulazioni coerenti

$$p_e(\gamma) \approx \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \gamma})$$

Dove α_M e β_M dipendono dal tipo di modulazione e approssimazione

Per esempio, per la BPSK $\alpha_M = 1$ e $\beta_M = 2$ *e non è un'approssimazione ,ma espressione esatta*

2) Il **Chernoff-bound** ⇨ $Q(x) \leq e^{-x^2/2}$

Concetto di diversità su canali radio

Esempio introduttivo: **diversità in ricezione**

Maximum Ratio Combining (MRC)

$$p_e(\gamma_\Sigma) \approx \alpha_M Q(\sqrt{\beta_M \gamma_\Sigma}) \leq \alpha_M e^{-\beta_M \gamma_\Sigma / 2}$$

Integrando sulla distribuzione χ^2 si ottiene:

$$\overline{P}_e \leq \alpha_M \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{1 + \beta_M \overline{\gamma}_i / 2}$$

Per alti SNR, assumendo $\overline{\gamma}_i = \overline{\gamma}$

$$\overline{P}_e \approx \alpha_M \left(\frac{\beta_M \overline{\gamma}}{2} \right)^{-M}$$

Lo schema MRC ottiene l'ordine di diversità PIENO (full diversity order), pari a M

Diversità Spaziale

Diversità in ricezione

Diversi schemi di diversità in ricezione

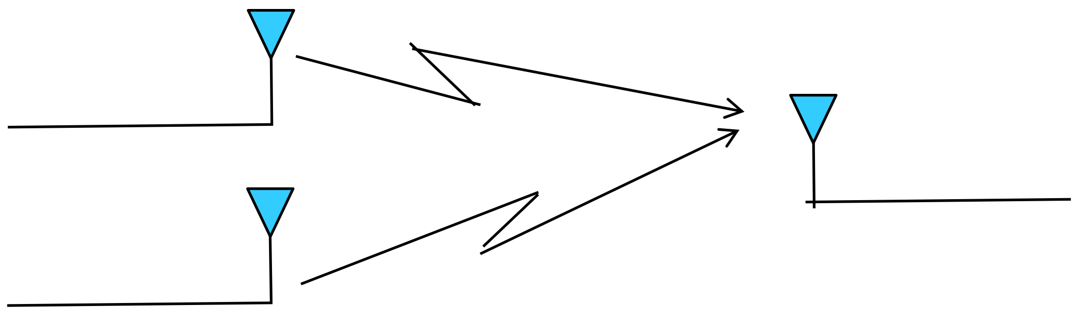
Selection combining: degli M segnali ricevuti, si seleziona il più “forte”

Switched combining: il ricevitore sceglie un’altro segnale (tra quelli disponibili) quando la qualità di quello presente scende sotto un certa soglia (più semplice, ma meno efficiente della selection combining)

Equal gain combining: tutte le repliche vengono sommate insieme **coerentemente**

Maximal-Ratio-Combining (MRC): I segnali ricevuti sono pesati con dei pesi proporzionali al SNR e quindi sommati. L’SNR risultante sarà pari a M volte l’SNR di ogni singolo canale (se gli M canali tra antenna in TX e le M antenne in ricezione sono caratterizzati da fading indipendente e stesso SNR).

Diversità in trasmissione



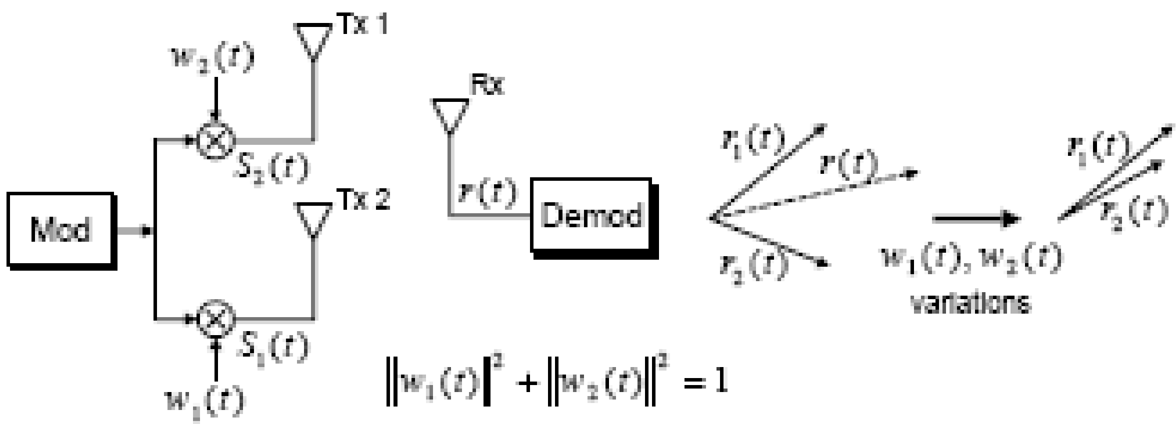
1)con feedback dal ricevitore (con CSIT, Channel Side Information at the TX)

2) senza feedback (senza CSIT)

(ipotesi sotto'intesa: sistemi che lavorano con FDD e quindi non c'e' reciprocità)

Diversità in trasmissione

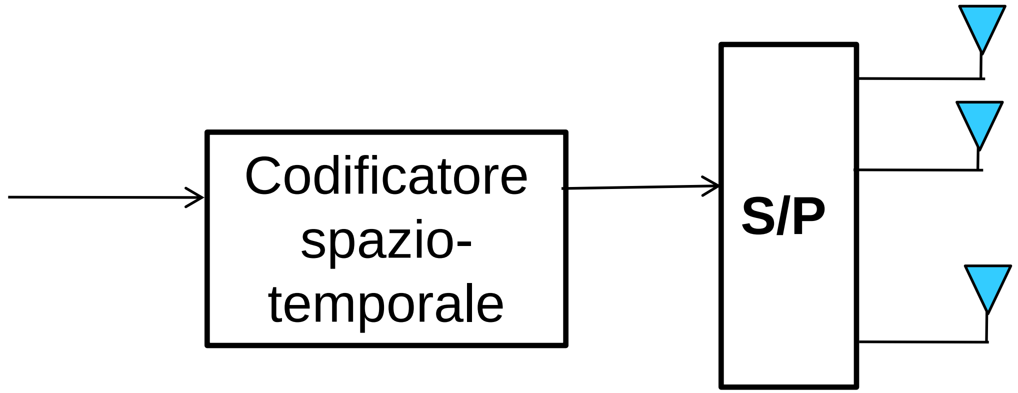
1) con feedback dal ricevitore: beamforming



- $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are varied such that $|r(t)|^2$ is maximized.
- $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are adapted with feedback information from the receiver.

Diversità in trasmissione

2) senza feedback: <u>Space Time Coding (Codici Spazio-Temporali)</u>



La codifica è realizzata aggiungendo della ridondanza in modo opportuno in entrambi i domini (tempo e spazio) creando cosi una correlazione nel segnale trasmesso (non so quanto vale il guadagno di canale, ma so o meglio ipotizzo che sia uguale per due intervalli consecutivi e quindi sfrutto questa informazione se nel trasmettere creo una correlazione tra le cose che mando nei due intervalli di tempo)

Questa correlazione permette di ottenere il guadagno di diversità laddove non c'è conoscenza del canale in TX, ma per ottenerlo, **devo usare più di un intervallo temporale per la trasmissione**

Codici Spazio-Temporali

Esempio: trasmetto su due intervalli di tempo la stessa informazione, una volta su di una antenna e una volta su di un'altra antenna

	Antenna #1	Antenna #2
t	S	
t+1		S

$$y_1 = h_1 s + n_1$$
$$y_2 = h_2 s + n_2$$

Se il fading si può ritenere scorrelato, con questo schema ottengo lo stesso risultato in termini di guadagno di diversità (più favorevole distribuzione dell'SNR totale) che ottengo con due antenne in ricezione sufficientemente spaziate: se faccio un MRC dei due segnali ricevuti nei due istanti di tempo, ottengo un ordine di diversità pari a due.

Tuttavia, per questo schema, la data rate è dimezzata!

Codici Spazio-Temporali

Esempio: schema di Alamouti

N=2
M=1

spazio →

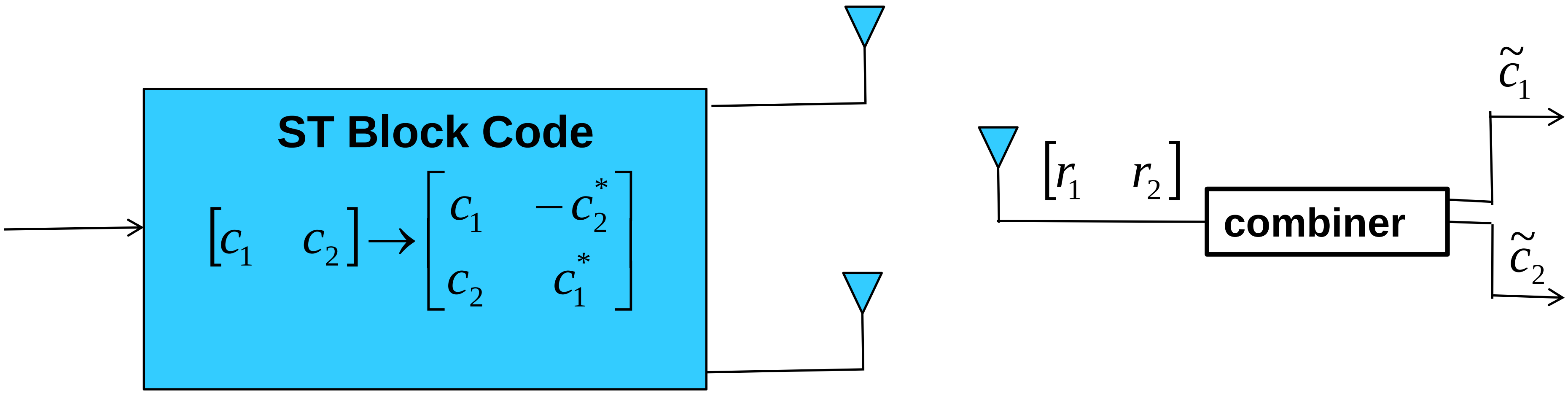
tempo ↓

	Antenna #1	Antenna #2
t	c_1	c_2
t+1	$-c_2^*$	c_1^*

Codici Spazio-Temporali

Esempio: schema di Alamouti

N=2
M=1



Matrice del segnale trasmesso

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2^* \\ c_2 & c_1^* \end{bmatrix}$$

spazio

tempo

Vettore ricevuto $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}$

Vettore dei simboli trasmessi $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$

Codici Spazio-Temporali

Esempio: schema di Alamouti

N=2
M=1

Ipotesi base dello schema di Alamouti: canale costante su due intervalli di simbolo

$$r_1 = h_1 c_1 + h_2 c_2 + n_1$$

$$r_2 = -h_1 c_2^* + h_2 c_1^* + n_2$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Hc} + \mathbf{n}$$

Si noti che: **H è ortogonale**

Infatti:

$$\mathbf{HH}^* = \left(h_1^2 + h_2^2\right)\mathbf{I}$$

Codici Spazio-Temporali

Esempio: schema di Alamouti

N=2
M=1

quindi, se il combiner realizza una trasformazione lineare moltiplicando il vettore dei due simboli ricevuti nei due distinti intervalli di tempo per l'inverso della matrice $\mathbf{H}$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{H}^{*}\mathbf{r} = (h_1^2 + h_2^2)\mathbf{I} \cdot \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{n}}$$

$$\Downarrow$$

Posso stimare SEPARATAMENTE i due simboli trasmessi in quanto:

$$\tilde{c}_1 = \|\mathbf{h}\|^2 \cdot c_1 + \tilde{n}_1$$

$$\tilde{c}_2 = \|\mathbf{h}\|^2 \cdot c_2 + \tilde{n}_2$$

Questo DISACCOPPIAMENTO permette di fare la decodifica ottima (Maximum Likelihood) con la stessa complessità del caso singola antenna!

Codici Spazio-Temporali

Esempio: schema di Alamouti

Ha un guadagno d'array?

$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{H}^* \mathbf{n}$ è un vettore di rumore Gaussiano complesso con media nulla e matrice di covarianza

$$E[\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}^*] = (|h_1|^2 + |h_2|^2) N_0 \mathbf{I}$$

e quindi l'SNR per ognuno ciascuno dei due simboli sarà:

$$\boxed{\gamma_i = \frac{(|h_1|^2 + |h_2|^2)}{2N_0} E_S \qquad \mathrm{i} = 1,2}$$

Nota: Il fattore 2 a denominatore deriva dal fatto che la potenza trasmessa per simbolo non è più Es ma Es/2 (perché lo stesso simboli e' trasmesso in due intervalli di tempo, a metà potenza in ogni intervallo)

⇓

Guadagno d'array 1 (che si avrebbe se posso supporre che entrambi i guadagni di canale siano quasi uguali) ⟹ <u>non c'e' guadagno di array</u>

Codici Spazio-Temporali

Esempio: schema di Alamouti

$$\tilde{c}_1 = \|\mathbf{h}\|^2 \cdot c_1 + \tilde{n}_1$$

$$\tilde{c}_2 = \|\mathbf{h}\|^2 \cdot c_2 + \tilde{n}_2$$

$\Downarrow$

La distribuzione statistica dell’SNR è uguale a quella che ho con il MRC con 2 elementi d’antenna (e quindi, in caso di fading alla Rayleigh, l’SNR è una chi-quadro con 2 gradi di libertà)

$\Downarrow$

Guadagno di diversità 2 (full diversity gain, come uno schema MRC)