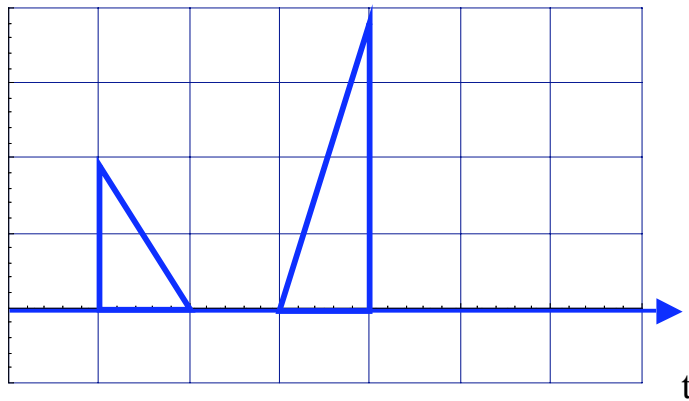


## Esercizi sulla convoluzione

### Esercizio 1

Si determini la convoluzione dei due segnali triangolari  $f(t)$  e  $g(t)$  di seguito indicati. Si tracci il grafico della funzione trovata.



### Soluzione

Si deve calcolare la seguente funzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Preliminare alla soluzione è la determinazione della forma analitica di  $f(t)$  e  $g(t)$ .

Riguardo a  $f(t)$ , si tratta di un segmento rettilineo, appartenente alla retta che passa per i punti (1,2) e (2,0): Posto  $f(t) = a \cdot t + b$ , imponendo il passaggio per i due punti detti, si ricava  $a = -2$ ,  $b = 4$ , quindi

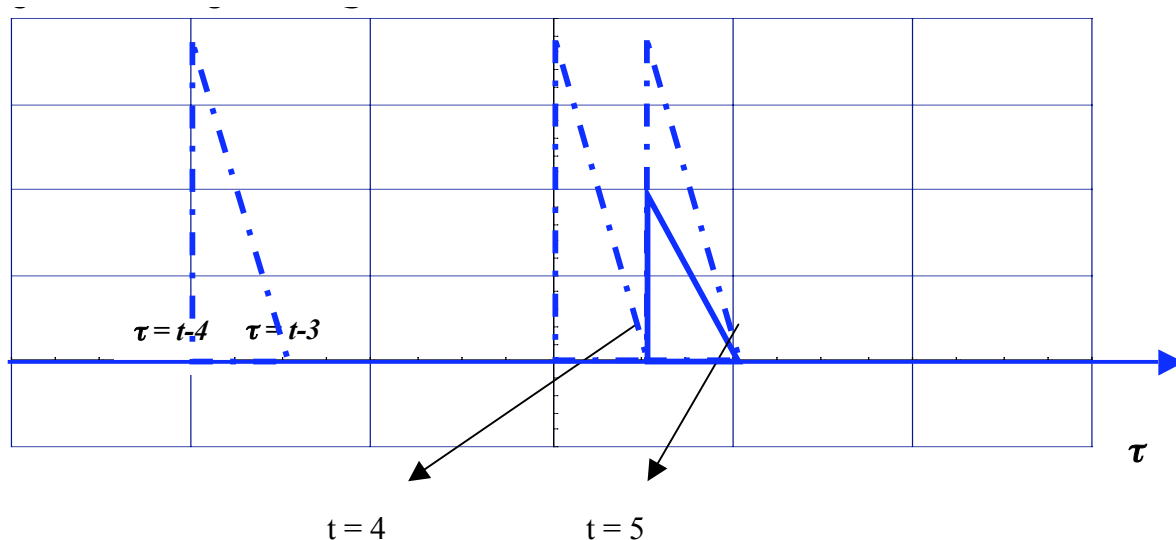
$$f(t) = -2 \cdot t + 4 \quad 1 \leq t \leq 2, \quad 0 \text{ altrove}$$

Riguardo a  $g(t)$ , si tratta di un segmento rettilineo, appartenente alla retta che passa per i punti (3,0) e (4,4): Posto, al solito,  $g(t) = a \cdot t + b$ , imponendo il passaggio per i due punti detti, si ricava  $a = 4$ ,  $b = -12$ , col che

$$g(t) = 4 \cdot t - 12 \quad 3 \leq t \leq 4, \quad 0 \text{ altrove}$$

L'operazione di convoluzione indicata comporta la suddivisione in vari casi:

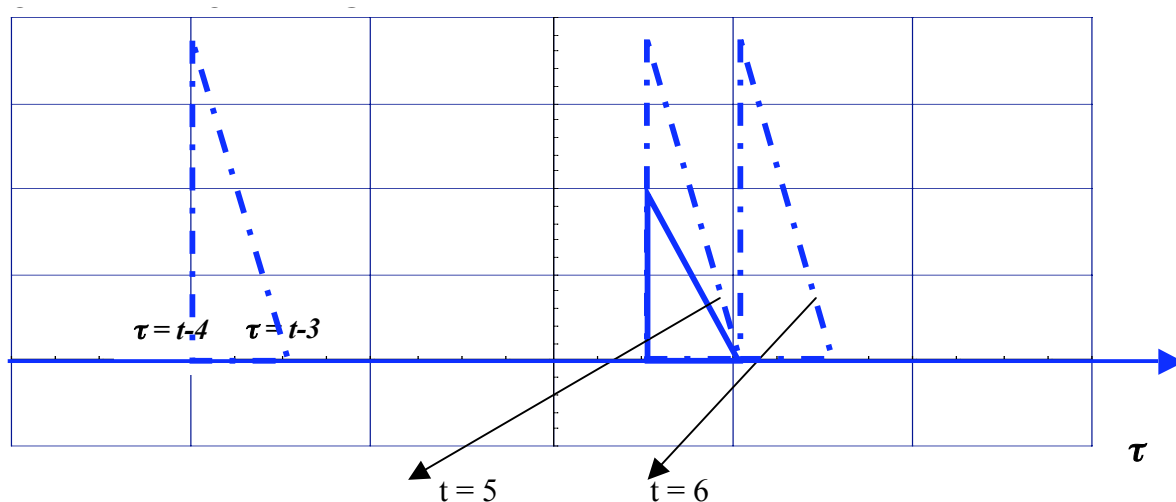
1° caso:  $4 \leq t \leq 5$ .



Riguardo ai limiti di integrazione, in tale intervallo, si va da  $\tau = 1$  allo zero di  $g(t-\tau)$ , ovvero allo zero di  $4 \cdot (t-\tau) - 12$ , cioè  $\tau = \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot t - 12)$ ; quindi

$$\int_1^{(4t-12)/4} (-2\tau+4) \cdot (4 \cdot (t-\tau) - 12) d\tau = \frac{448}{3} - 96t + 20t^2 - \frac{4}{3}t^3 \quad 4 \leq t \leq 5$$

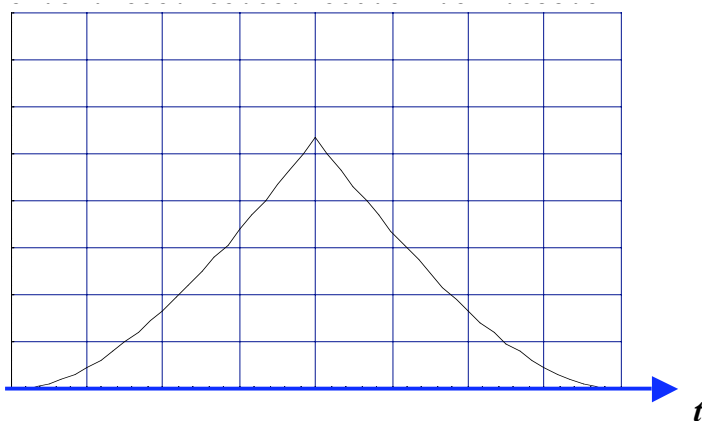
2° caso:  $5 < t \leq 6$ .



Riguardo ai limiti di integrazione, in tale intervallo, si va da allo zero di  $g(t-\tau)$ , diminuito di 1, ovvero allo zero di  $4 \cdot (t-\tau) - 12$  diminuito di 1, cioè  $\tau = \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot t - 12) - 1$ , sino a  $\tau = 2$ ; quindi

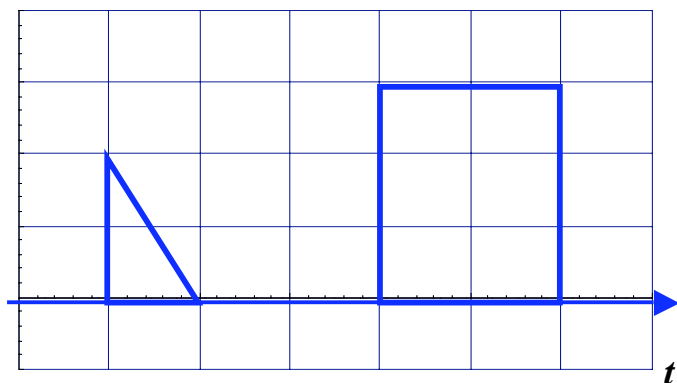
$$\int_{(4t-12)/4-1}^2 (-2\tau+4) \cdot (4 \cdot (t-\tau) - 12) d\tau = -144 + 96t - 20t^2 + \frac{4}{3}t^3 \quad 5 \leq t \leq 6$$

Globalmente, si ha il grafico seguente, per la funzione di convoluzione



## Esercizio 2

Si determini la convoluzione dei due segnali (triangolare  $f(t)$  e rettangolare  $g(t)$ ) di seguito indicati. Si tracci il grafico della funzione trovata.



## Soluzione

Si deve calcolare la seguente funzione

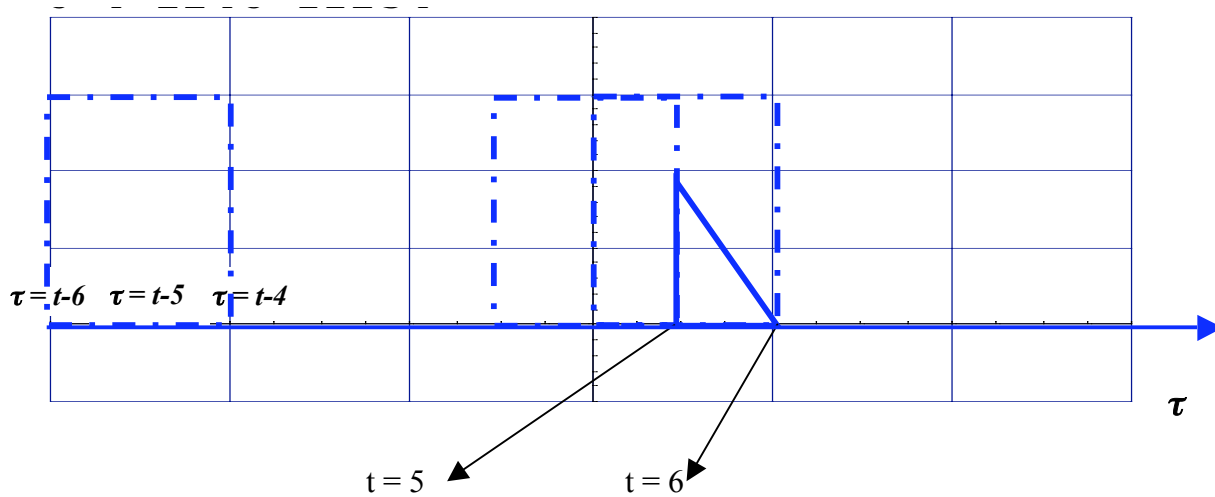
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad g(t) = 3 \cdot \text{rect}\left(\frac{t-5}{2}\right)$$

Preliminare alla soluzione è la determinazione della forma analitica di  $f(t)$ . Si tratta di un segmento rettilineo, appartenente alla retta che passa per i punti (1,2) e (2,0): Posto  $f(t) = a \cdot t + b$ , imponendo il passaggio per i due punti detti, si ricava  $a = -2$ ,  $b = 4$ , col che

$$f(t) = -2 \cdot t + 4 \quad 1 \leq t \leq 2, \quad 0 \text{ altrove}$$

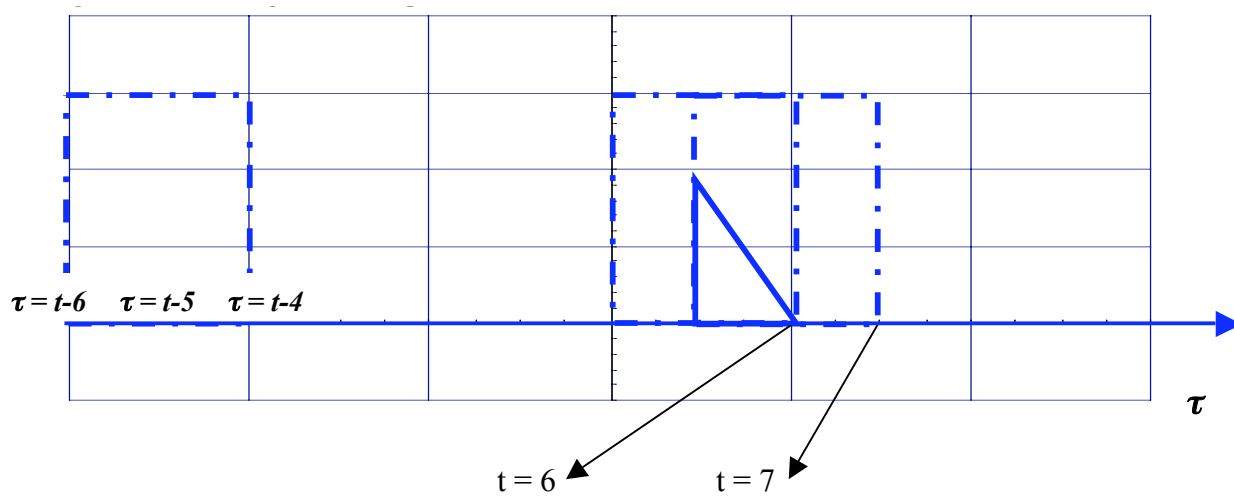
L'operazione di convoluzione indicata comporta la suddivisione in vari casi:

1° caso:  $5 \leq t \leq 6$ .



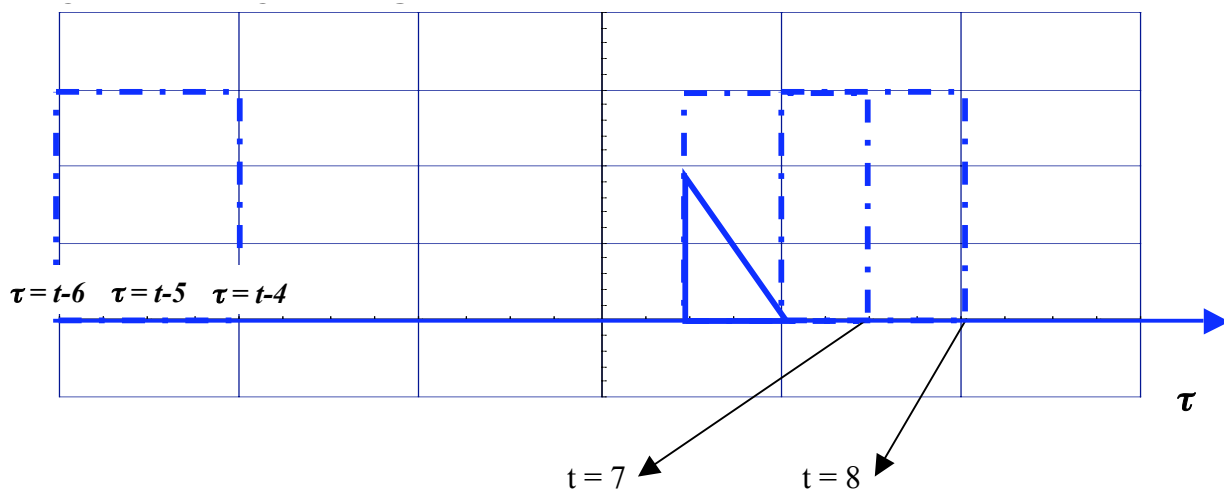
$$\int_{-4+t}^{-4+t} (-2\tau+4) d\tau = -35+12 \cdot t - t^2 \quad 5 \leq t \leq 6$$

2° caso:  $6 < t \leq 7$ .



$$\int_{-4+t}^{-4+t} (-2\tau+4) d\tau = 1 \quad 6 < t \leq 7$$

3° caso:  $7 < t \leq 8$



$$\int_{-6+t}^2 (-2\tau+4) d\tau = 64 - 16 \cdot t + t^2 \quad 7 < t \leq 8$$

Globalmente, si ha il grafico seguente, per la funzione di convoluzione

