

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

Corso di

Segnali e Trasmissione

Betti – Luglio - Leo

I Esercitazione 2004

Ver. 1.0

Anno Accademico 2003/04

Esercizio 1

Si determini la funzione di autocorrelazione dell'impulso rettangolare:

$$x(t) = A \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Soluzione

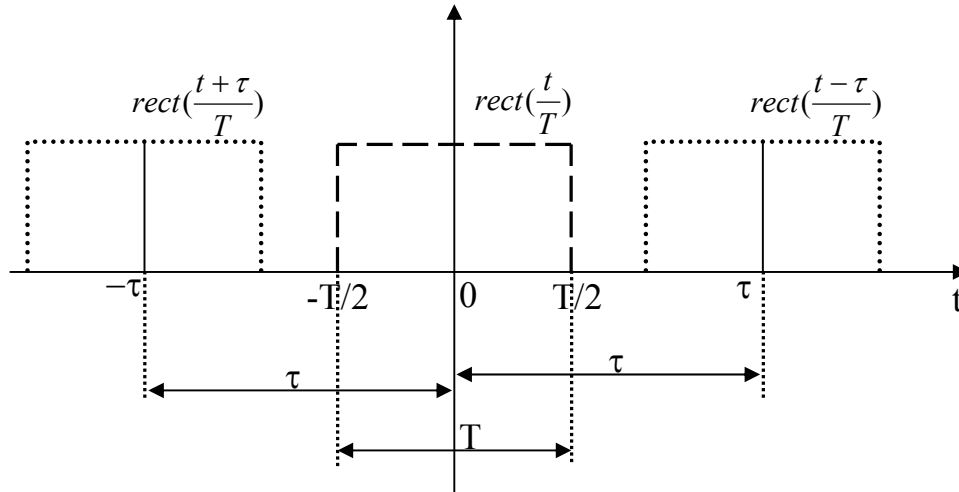
L'esercizio richiede di calcolare la seguente funzione:

$$C_{xx}(\tau) = A^2 \int \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt$$

Questa operazione comporta la divisione in più casi:

1° Caso: $|\tau| > T$

In questo caso si ha la situazione:

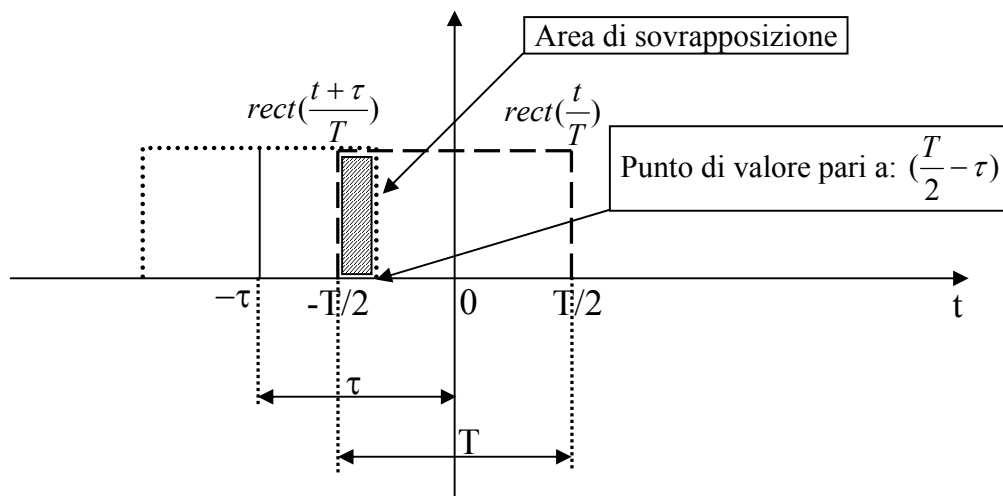


Per cui la funzione rect e la replica sono ad una distanza τ maggiore della durata T della funzione stessa.

In conseguenza di ciò: $C_{xx}(\tau) = 0$

2° Caso: $0 \leq \tau \leq T$

In questa situazione si ha:



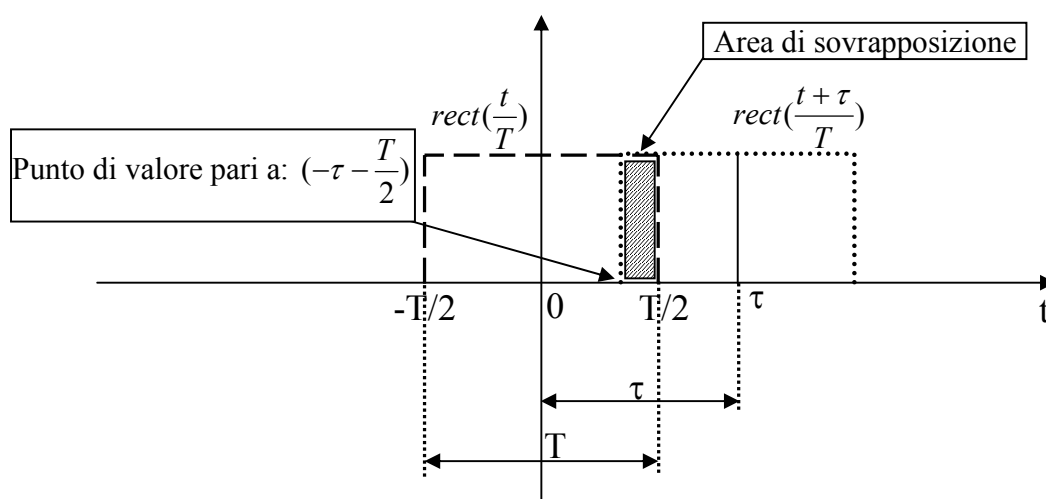
In conseguenza di questa situazione l'integrale deve essere calcolato tra il valore minimo di $-\frac{T}{2}$ ed il valore massimo di $-\tau + \frac{T}{2}$.

L'integrale diventa quindi:

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau + \frac{T}{2}} A^2 dt = A^2(T - \tau)$$

3° Caso: $-T \leq \tau \leq 0$

In questa situazione si ha:

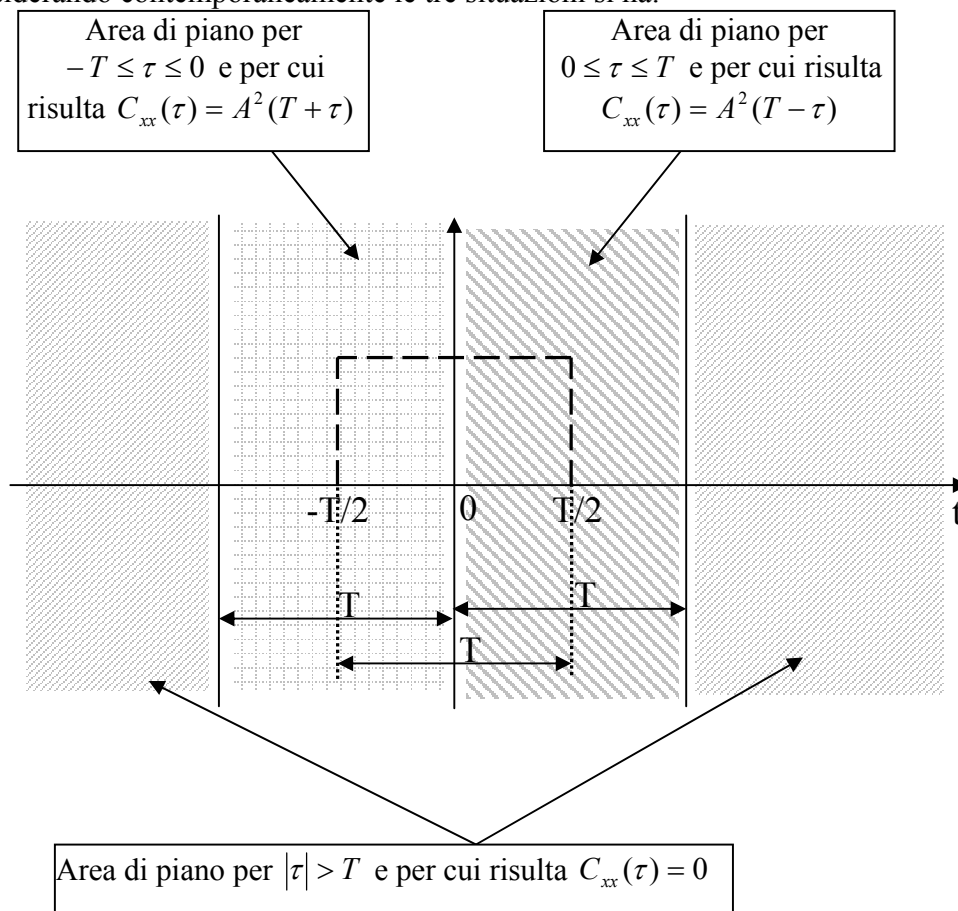


In conseguenza di questa situazione l'integrale deve essere calcolato tra il valore minimo di $-\tau - \frac{T}{2}$ ed il valore massimo di $\frac{T}{2}$

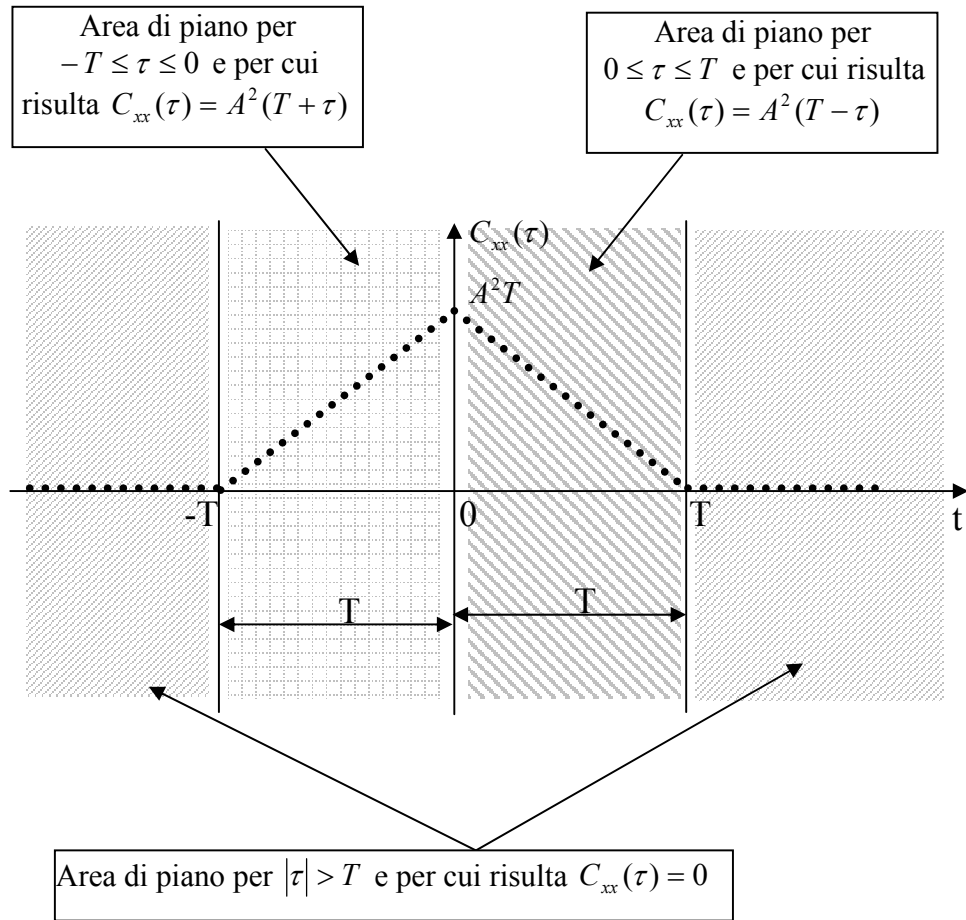
L'integrale diventa quindi:

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\tau - \frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2(T + \tau)$$

Considerando contemporaneamente le tre situazioni si ha:



Mettendo insieme i risultati ottenuti si ottiene il grafico della funzione di autocorrelazione:



Per cui la funzione di autocorrelazione, mettendo insieme i contributi risulta pari a:

$$C_{xx}(\tau) = A^2(T - |\tau|) \cdot \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T}\right) = A^2T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\tau}{2T}\right) \stackrel{\text{def}}{=} A^2T \cdot \left[\text{tri}\left(\frac{\tau}{2T}\right) \right]$$

Esercizio 2

Si determini l'energia per la funzione coseno rialzato:

$$x(t) = \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Soluzione

L'esercizio richiede di applicare la formula dell'energia al coseno. Sfruttando la simmetria di tale funzione rispetto all'origine nell'intervallo $\left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ e il fatto che la funzione è limitata a tale intervallo, possiamo applicare direttamente la formula dell'energia.

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= \int \left| \frac{A}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \right|^2 dt = \frac{A^2}{4} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]^2 dt = \\
&= 2 \frac{A^2}{4} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]^2 dt = \\
&= \frac{A^2}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]^2 dt = \frac{A^2}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] dt = \\
&= \frac{A^2}{2} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot dt \right] = \\
&= \frac{A^2}{2} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right) dt \right] = \\
&= \frac{A^2}{2} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{3}{2} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) dt \right] = \\
&= \frac{A^2}{2} \left[\frac{3}{2} \left[t \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{2T}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{T}{2 \cdot 4\pi} \left[\sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} \right] = \\
&= \frac{A^2}{4} \left[\frac{3T}{2} + \frac{2T}{\pi} \cdot \left[\sin\left(\frac{2\pi T}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin(0) \right] + \frac{T}{4\pi} \left[\sin\left(\frac{4\pi T}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - \sin(0) \right] \right] = \\
&= \frac{A^2}{4} \left[\frac{3T}{2} + \frac{2T}{\pi} \cdot [\sin(\pi)] + \frac{T}{4\pi} [\sin(2\pi)] \right] = \frac{3}{8} A^2 T
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare prima la potenza del seguente segnale periodico:

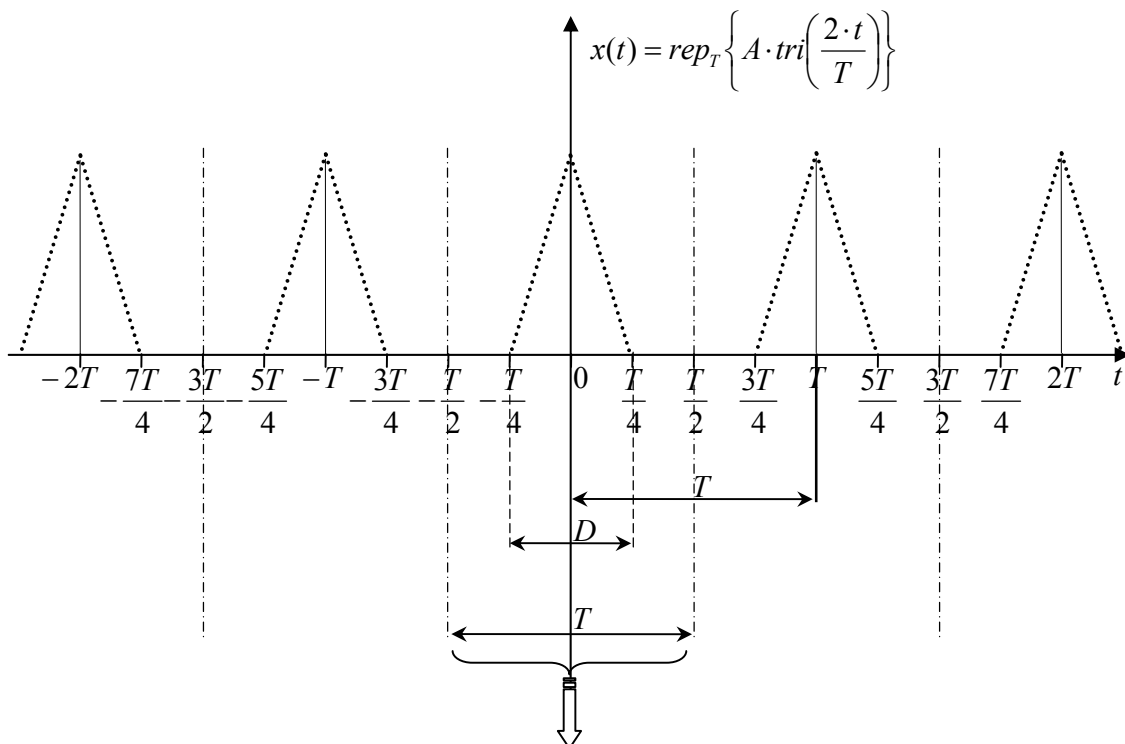
$$X(t) = \text{rep}_T \left\{ A \cdot \text{tri} \left(\frac{2t}{T} \right) \right\}$$

e successivamente del segnale periodico:

$$X(t) = \text{rep}_T \left\{ A \cdot \text{tri} \left(\frac{2t}{3T} \right) \right\}$$

Soluzione

La prima parte dell'esercizio richiede di calcolare la potenza della funzione rappresentata nel grafico successivo:



In questo caso $D \leq T$ e, limitandosi al periodo T , la funzione triangolo si può scrivere: $x(t) = A \cdot \text{tri} \left(\frac{2 \cdot t}{T} \right) = A \left(1 - \frac{4|t|}{T} \right)$

Si sta trattando un segnale periodico, e dunque di potenza, il quale non ha energia finita. Possiamo, tuttavia, calcolare la potenza media su un periodo sfruttando la relazione:

$$P_{xx} = \frac{E_{xx}}{T}$$

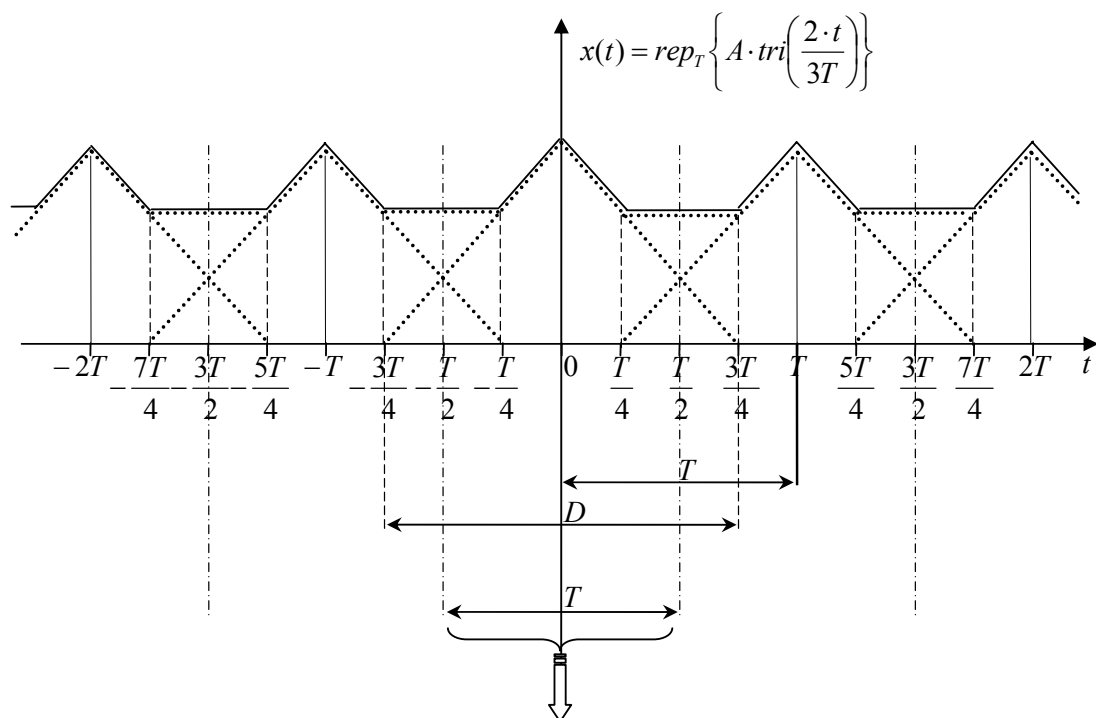
In questo caso si ha un segnale, limitato al periodo T , la cui durata D è inferiore alla durata del periodo stesso, caso in cui $D \leq T$, si può quindi procedere al calcolo della potenza media sul periodo.

$$P_{xx} = \frac{E_{xx}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(A \cdot \text{tri} \left(\frac{2 \cdot t}{T} \right) \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(A \left(1 - \frac{4|t|}{T} \right) \right)^2 dt$$

Se si sfrutta la simmetria intorno all'origine si ha:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{E_{xx}}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \left(A \left(1 - \frac{4|t|}{T} \right) \right)^2 dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(A \left(1 - \frac{4t}{T} \right) \right)^2 dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} A^2 \left(1 - \frac{4t}{T} \right)^2 dt = \frac{2A^2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(1 - \frac{4t}{T} \right)^2 dt = \frac{2A^2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(1 - \frac{8t}{T} + \frac{16t^2}{T^2} \right) dt = \\ &= \frac{2A^2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{8t}{T} dt + \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{16t^2}{T^2} dt \right] = \frac{2A^2}{T} \left[\left[t \right]_0^{\frac{T}{4}} - \left[\frac{4t^2}{T} \right]_0^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{16t^3}{3T^2} \right]_0^{\frac{T}{4}} \right] = \\ &= \frac{2A^2}{T} \left[\frac{T}{4} - \frac{T}{4} + \frac{T}{12} \right] = \frac{2A^2}{T} \cdot \frac{T}{12} = \frac{A^2}{6} \end{aligned}$$

Nella situazione in cui consideriamo invece il segnale $X(t) = \text{rep}_T \left\{ A \cdot \text{tri} \left(\frac{2t}{3T} \right) \right\}$ si ha un segnale che può essere rappresentato come nel grafico successivo:

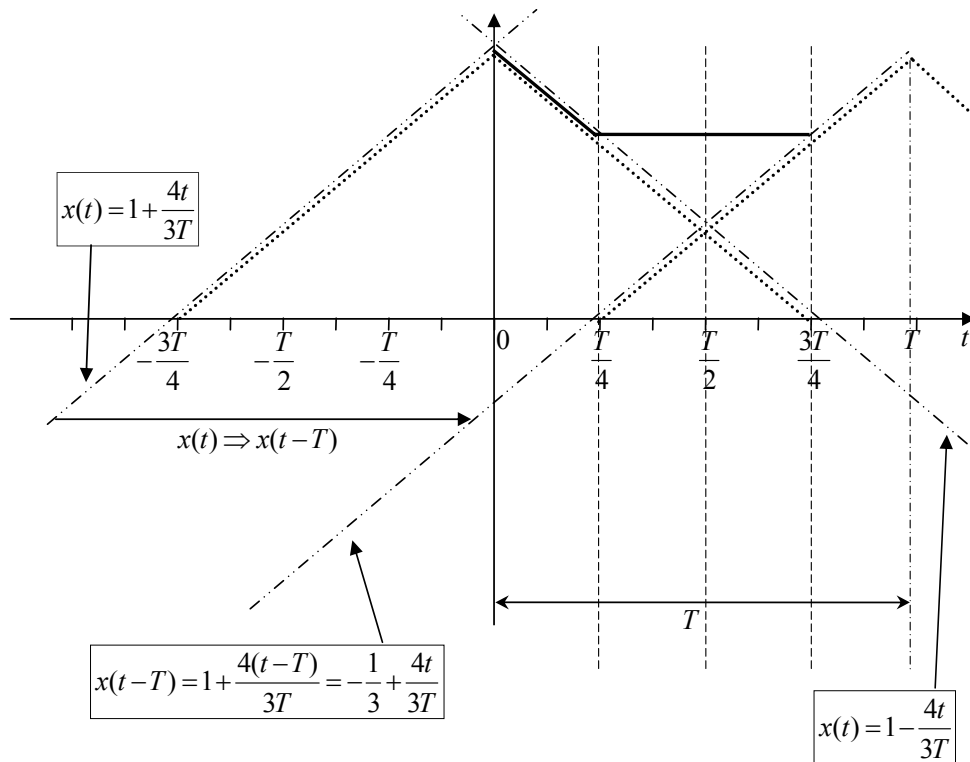


In questo caso $D \leq T$ e, limitandosi al periodo T , la funzione triangolo si può scrivere: $x(t) = A \cdot \text{tri}\left(\frac{2 \cdot t}{T}\right) = A \left(1 - \frac{4|t|}{3T}\right)$

Si nota come in questo caso si abbia $D > T$. C'è quindi sovrapposizione tra i le varie repliche del segnale. Tuttavia, anche in questo caso, possiamo provare a calcolare la potenza media nell'intervallo di replica T .

Anche questa volta sfrutteremo le proprietà di simmetria del segnale triangolo e calcoleremo la potenza media come il doppio della la potenza del segnale calcolata nell'intervallo $\left(0; \frac{T}{2}\right)$.

Quindi, come primo passo, vediamo come possiamo scomporre la funzione nell'intervallo $\left(0; \frac{T}{2}\right)$.



Come si vede possiamo dividere ulteriormente il problema e andare a calcolare considerare le funzioni sull'intervallo $\left(0; \frac{T}{4}\right)$ e sull'intervallo $\left(\frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right)$.

Nell'intervallo $\left(0; \frac{T}{4}\right)$ il segnale può essere rappresentato solo dalla funzione

$$x(t) = A \left(1 - \frac{4t}{3T}\right).$$

Calcolando l'integrale per questa funzione nell'intervallo $\left(0; \frac{T}{4}\right)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} P'_{xx} &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(A \left(1 - \frac{4t}{3T}\right) \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} A^2 \left(1 - \frac{4t}{3T}\right)^2 dt = \frac{A^2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(1 - \frac{4t}{3T}\right)^2 dt = \frac{A^2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(1 - \frac{8t}{3T} + \frac{16t^2}{9T^2}\right) dt = \\ &= \frac{A^2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} dt - \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{8t}{3T} dt + \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{16t^2}{9T^2} dt \right] = \frac{A^2}{T} \left[\left[t\right]_0^{\frac{T}{4}} - \frac{8}{3T} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{T}{4}} + \frac{16}{9T^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{T}{4}} \right] = \frac{A^2}{T} \left[\frac{T}{4} - \frac{8}{6T} \frac{T^2}{16} + \frac{16}{27T^2} \frac{T^3}{64} \right] = \\ &= \frac{A^2}{T} \left[\frac{T}{4} - \frac{T}{12} + \frac{T}{108} \right] = \frac{19A^2}{108} \end{aligned}$$

Nell'intervallo $\left(\frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right)$ si ha la somma della funzione $x(t) = A\left(1 - \frac{4t}{3T}\right)$ e della funzione

$$x(t-T) = A\left(-\frac{1}{3} + \frac{4t}{3T}\right).$$

Se definiamo una funzione somma $x'(t) = x(t) + x(t-T)$ all'interno dell'intervallo troviamo:

$$x'(t) = x(t) + x(t-T) = A\left(1 - \frac{4t}{3T}\right) + A\left(-\frac{1}{3} + \frac{4t}{3T}\right) = A\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{4t}{3T} + \frac{4t}{3T}\right) = \frac{2A}{3}$$

Possiamo quindi calcolare la potenza per tale funzione nell'intervallo $\left(\frac{T}{4}; \frac{T}{2}\right)$:

$$P_{xx}'' = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{2A}{3}\right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \frac{4A^2}{9} dt = \frac{4A^2}{9} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} dt = \frac{A^2}{T} \left[t\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} = \frac{4A^2}{9T} \left[\frac{T}{2} - \frac{T}{4}\right] = \frac{4A^2}{9T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{A^2}{9}$$

Calcolando i vari contributi di potenza e facendo il calcolo su tutto il periodo T:

$$P_{TOT} = 2(P_{xx}' + P_{xx}'') = 2\left(\frac{19A^2}{108} + \frac{A^2}{9}\right) = 2A^2\left(\frac{19}{108} + \frac{1}{9}\right) = 2A^2\left(\frac{19+12}{108}\right) = 2A^2\left(\frac{31}{108}\right) = \frac{31 \cdot A^2}{54}$$

Esercizio 4

Data la funzione:

$$x(t) = 4e^{-2t}u(t)$$

calcolare:

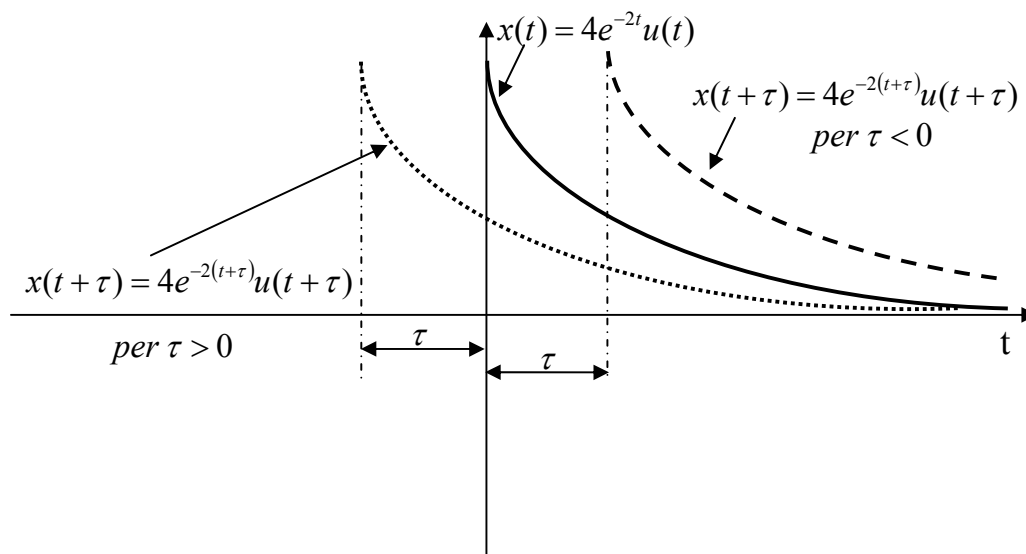
- $C_{xx}(\tau)$
- E_{xx}

Soluzione

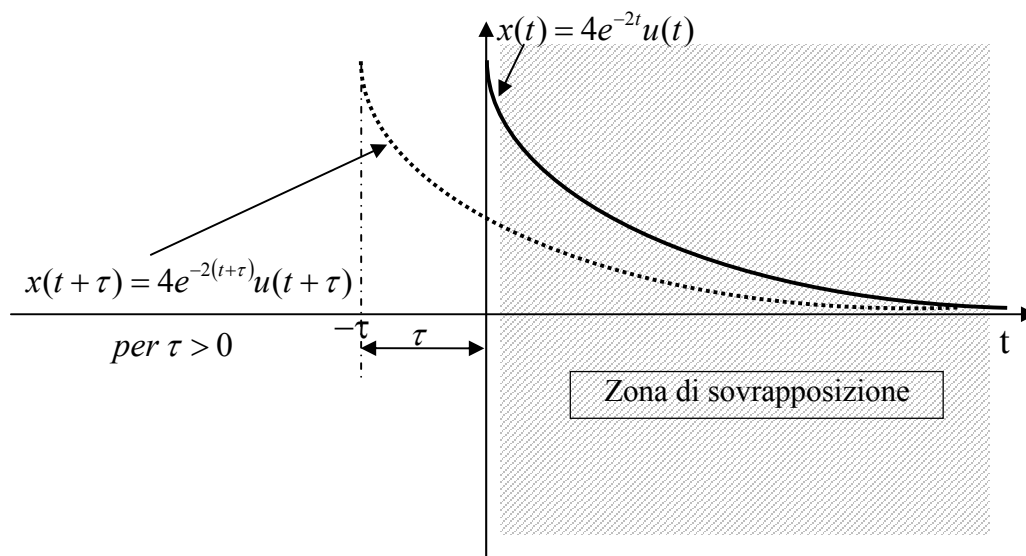
Per calcolare la $C_{xx}(\tau)$ dobbiamo prendere la funzione data e calcolarla al tempo $t+\tau$:

$$x(t) = 4e^{-2t}u(t) \Rightarrow x(t+\tau) = 4e^{-2(t+\tau)}u(t+\tau)$$

La figura seguente ci può aiutare a fare delle ipotesi sul valore di τ :



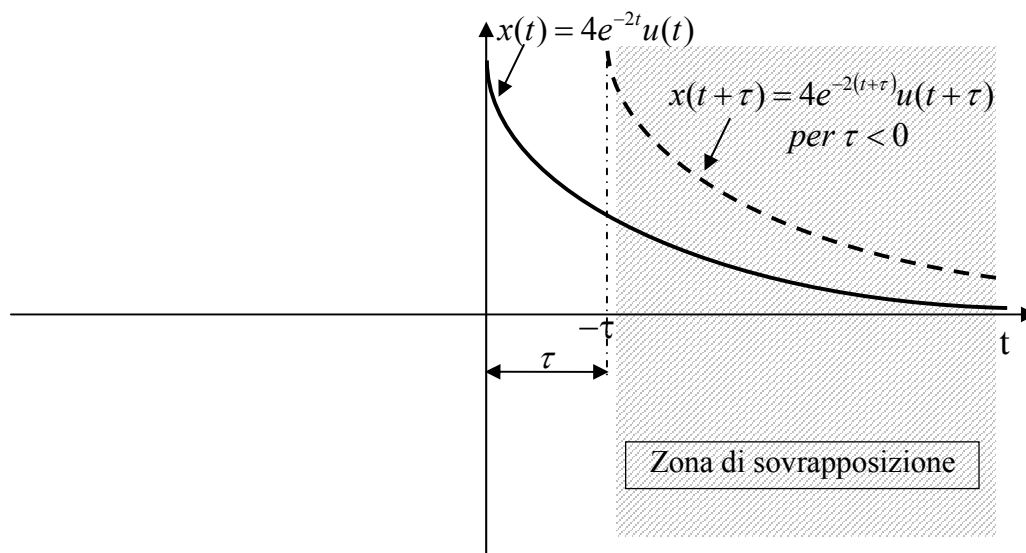
Esaminiamo il caso in cui $\tau > 0$. Dal grafico vediamo:



Per cui avremo un prodotto non nullo per $\tau \geq 0$ e l'autocorrelazione risulta:

$$C_{xx}(\tau) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2(t+\tau)} \cdot 4e^{-2t} dt = \int_0^{+\infty} 16e^{-4t-2\tau} dt = 4e^{-2\tau}$$

Esaminiamo il caso in cui $\tau < 0$. Dal grafico vediamo:



Per cui avremo un prodotto non nullo per $t \geq -\tau$ e quindi, ricordando che in questo caso $\tau < 0$ l'autocorrelazione risulta:

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\tau}^{+\infty} 4e^{-2(t+\tau)} \cdot 4e^{-2t} dt = \int_{-\tau}^{+\infty} 16e^{-4t-2\tau} dt = 4e^{2\tau}$$

Considerando entrambi i risultati, per $\tau < 0$ e per $\tau > 0$, possiamo scrivere la funzione di autocorrelazione generale:

$$C_{xx}(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$$

L'energia può essere agevolmente calcolata utilizzando la definizione:

$$E_{xx} = \int_0^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |4e^{-2t}|^2 dt = 16 \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt = \left[-4e^{-4t} \right]_0^{+\infty} = 4$$

Nel calcolo della energia può risultare utile anche la funzione di autocorrelazione calcolata per $\tau = 0$, per cui si ha:

$$E_{xx} = C_{xx}(\tau) \Big|_{\tau=0} = 4e^{2|\tau|} \Big|_{\tau=0} = 4$$

Esercizio 5

Data la funzione:

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$$

calcolare:

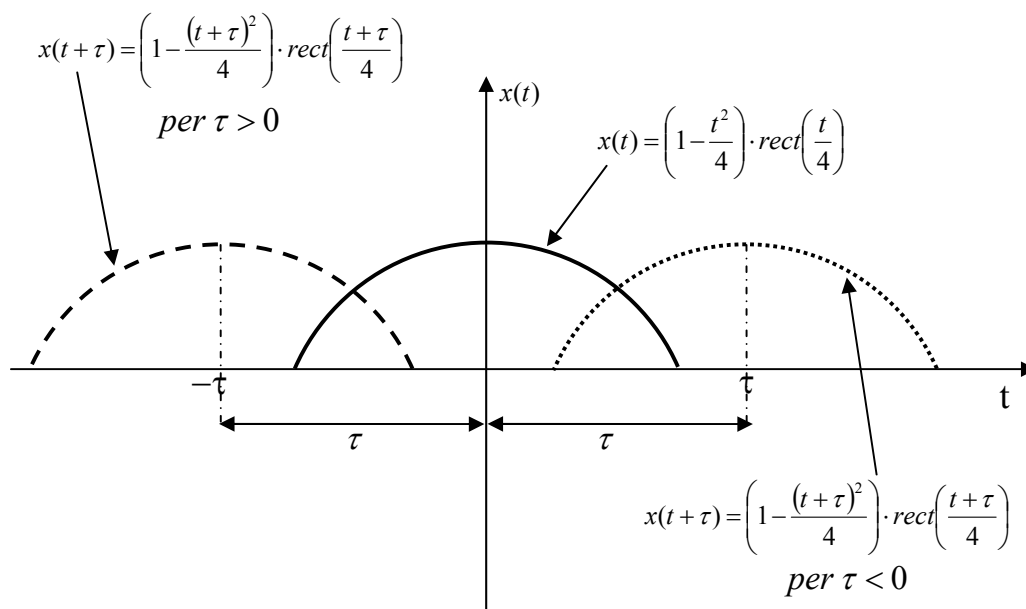
- $C_{xx}(\tau)$
- E_{xx}

Soluzione

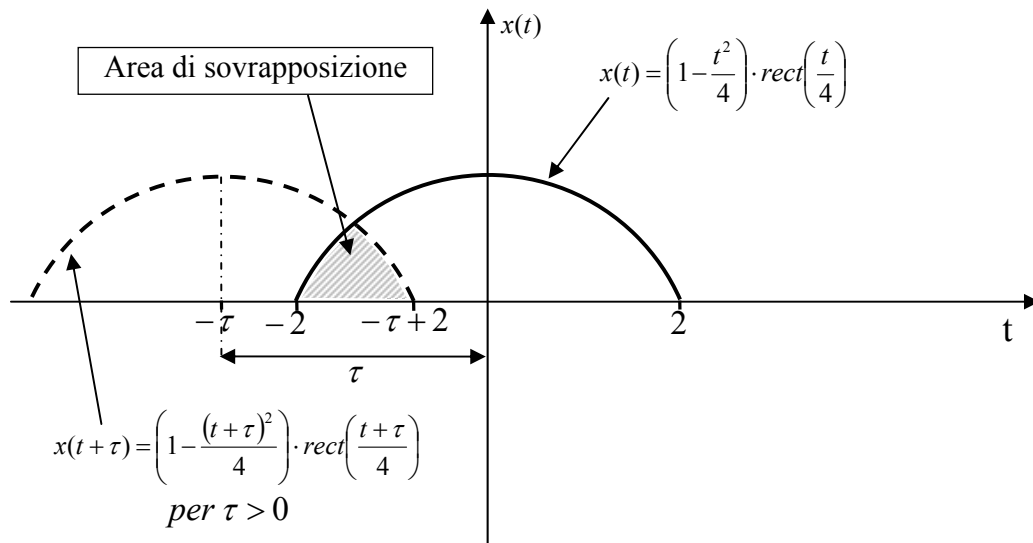
Per calcolare la $C_{xx}(\tau)$ dobbiamo prendere la funzione data e calcolarla al tempo $t+\tau$:

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \Rightarrow x(t+\tau) = \left(1 - \frac{(t+\tau)^2}{4}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{4}\right)$$

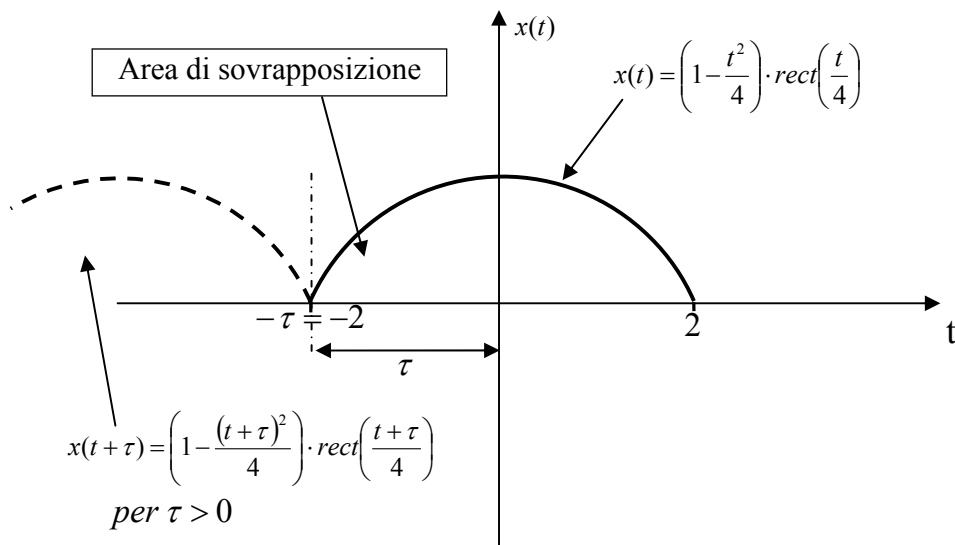
La figura seguente ci può aiutare a fare delle ipotesi sul valore di τ :



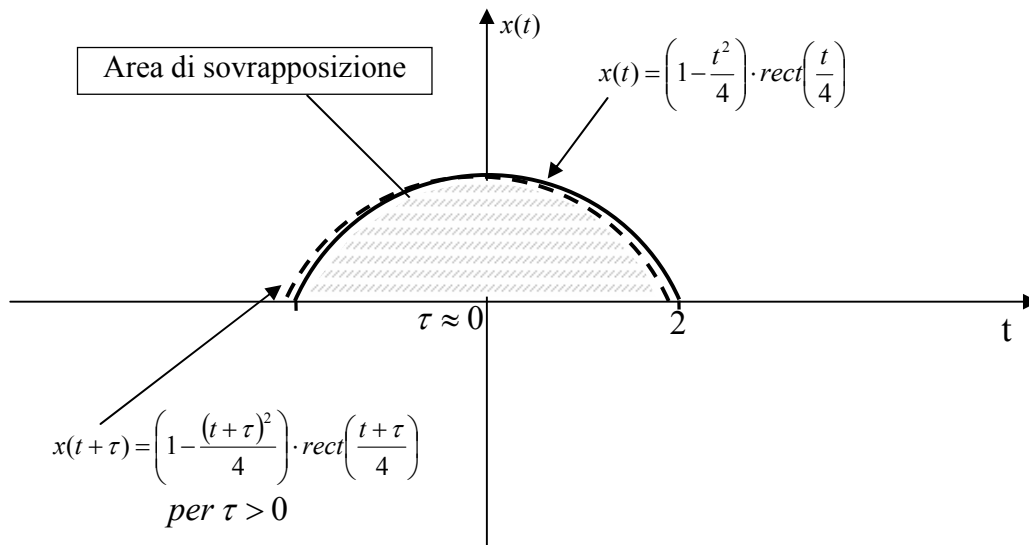
Esaminiamo il caso in cui $\tau > 0$. Dal grafico vediamo:



La figura seguente mostra il caso in cui $-\tau = -2$.



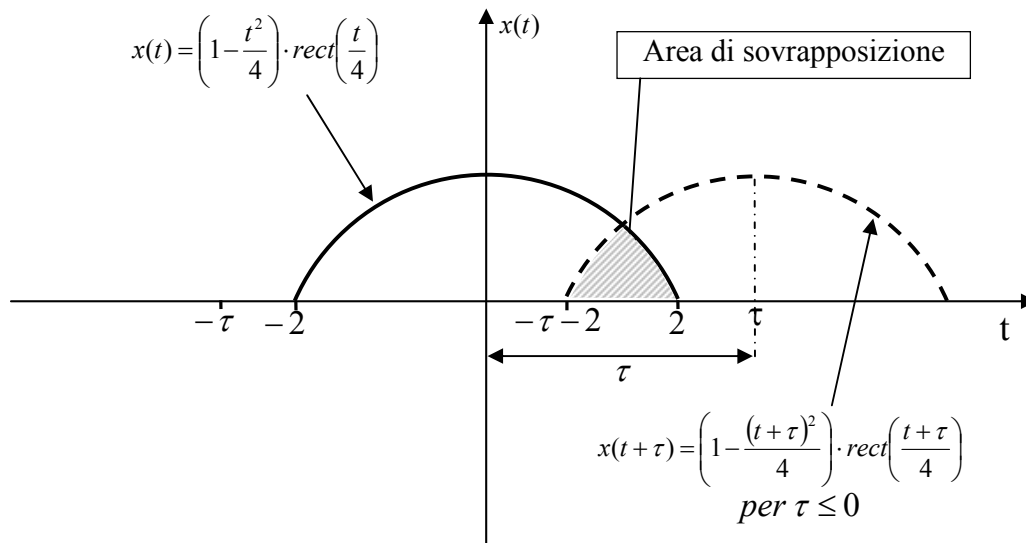
La figura seguente mostra il caso in cui $\tau > 0$. e $\tau \approx 0$.



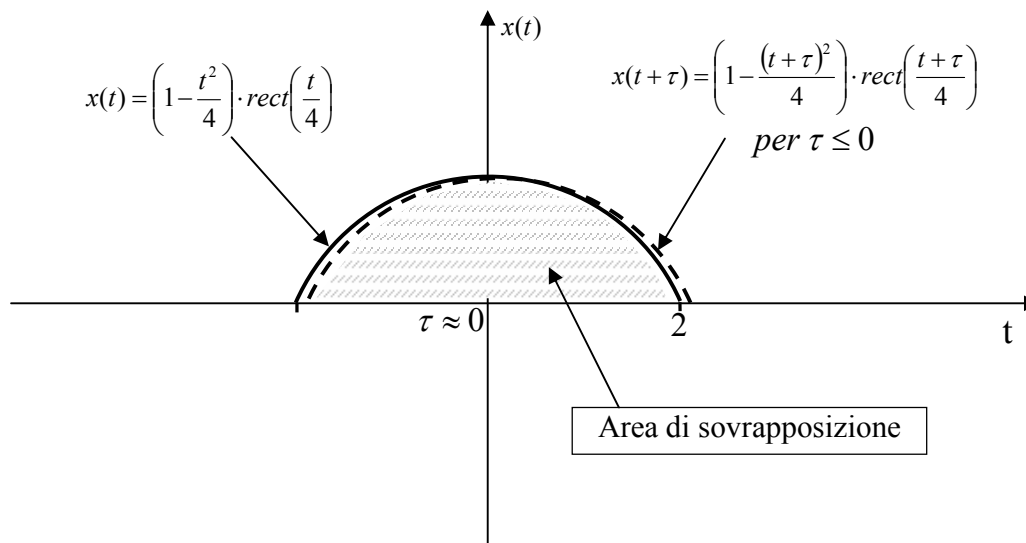
Per cui la funzione di autocorrelazione risulta in questo caso per $\tau > 0$ pari a:

$$\begin{aligned}
 C_{xx}(\tau) &= \int_{-2}^{-\tau+2} \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{(t+\tau)^2}{4}\right) dt = \frac{1}{16} \int_{-2}^{-\tau+2} (4-t^2) \cdot (4-t^2-2t\tau-\tau^2) dt = \\
 &= \frac{1}{16} \int_{-2}^{-\tau+2} (4-t^2) \cdot (4-t^2-2t\tau-\tau^2) dt = \frac{1}{16} \int_{-2}^{-\tau+2} [(16-4\tau^2)-8t\tau+(\tau^2-8)t^2+2\tau^3+t^4] dt = \\
 &= \frac{1}{16} \cdot \left[(16-4\tau^2)t - 4\tau t^2 + (\tau^2-8)\frac{t^3}{3} + \frac{\tau}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5 \right]_{-2}^{-\tau+2} = \frac{1}{16} \cdot \left\{ -\frac{1}{15}\tau^5 + \frac{8}{3}\tau^3 - \frac{32}{3}\tau^2 \right\} + \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

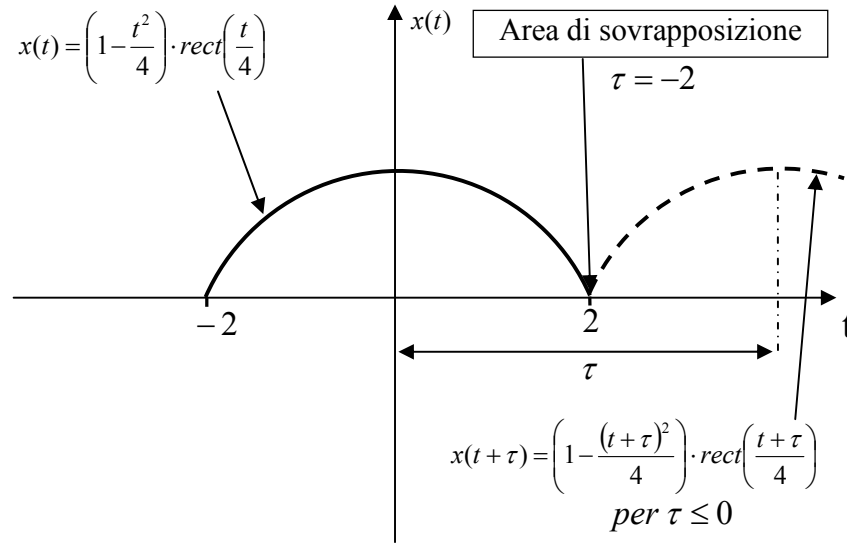
Esaminiamo il caso in cui $\tau \leq 0$. Dal grafico vediamo:



La figura seguente mostra il caso in cui $\tau > 0$. e $\tau \approx 0$.



La figura seguente mostra il caso in cui $\tau = -2$.



Per cui la funzione di autocorrelazione risulta in questo caso per $\tau \leq 0$ pari a:

$$\begin{aligned}
 C_{xx}(\tau) &= \int_{-\tau-2}^2 \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{(t+\tau)^2}{4}\right) dt = \frac{1}{16} \int_{-\tau-2}^2 (4-t^2) \cdot (4-t^2-2t\tau-\tau^2) dt = \\
 &= \frac{1}{16} \int_{-\tau-2}^2 (4-t^2) \cdot (4-t^2-2t\tau-\tau^2) dt = \frac{1}{16} \int_{-\tau-2}^2 [(16-4\tau^2)-8t\tau+(\tau^2-8)t^2+2\tau^3+t^4] dt = \\
 &= \frac{1}{16} \cdot \left[(16-4\tau^2)t - 4\tau t^2 + (\tau^2-8)\frac{t^3}{3} + \frac{\tau}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5 \right]_{-\tau-2}^2 = \frac{1}{16} \cdot \left\{ \frac{1}{15}\tau^5 - \frac{8}{3}\tau^3 - \frac{32}{3}\tau^2 \right\} + \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

Considerando entrambe le situazioni, sia per $\tau \leq 0$ che per $\tau > 0$, risulta:

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{16} \cdot \left\{ -\frac{1}{15}|\tau|^5 + \frac{8}{3}|\tau|^3 - \frac{32}{3}|\tau|^2 \right\} + \frac{32}{15}$$

Nel calcolo della energia può risultare utile anche la funzione di autocorrelazione calcolata per $\tau = 0$, per cui si ha:

$$E_{xx} = C_{xx}(\tau)|_{\tau=0} = \frac{1}{16} \cdot \left\{ -\frac{1}{15}|\tau|^5 + \frac{8}{3}|\tau|^3 - \frac{32}{3}|\tau|^2 \right\} + \frac{32}{15} \Big|_{\tau=0} = \frac{32}{15}$$