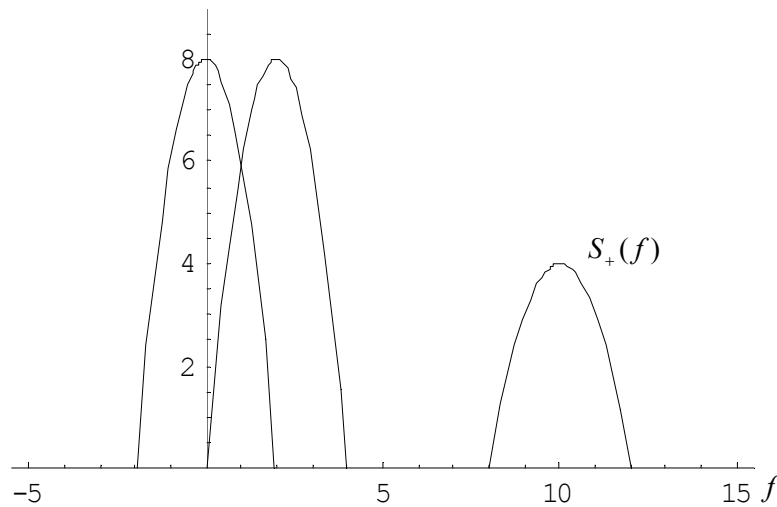


Esercitazione V

Calcolare il segnale analitico $a(t)$ ed inviluppo complesso $i(t)$ rispetto ad una data frequenza f_c a partire dallo spettro $S_+(f)$ mostrato in figura.

$$S_+(f) = 4 - (f - 10)^2 \left[\text{rect}\left(\frac{f - 10}{4}\right) \right]$$

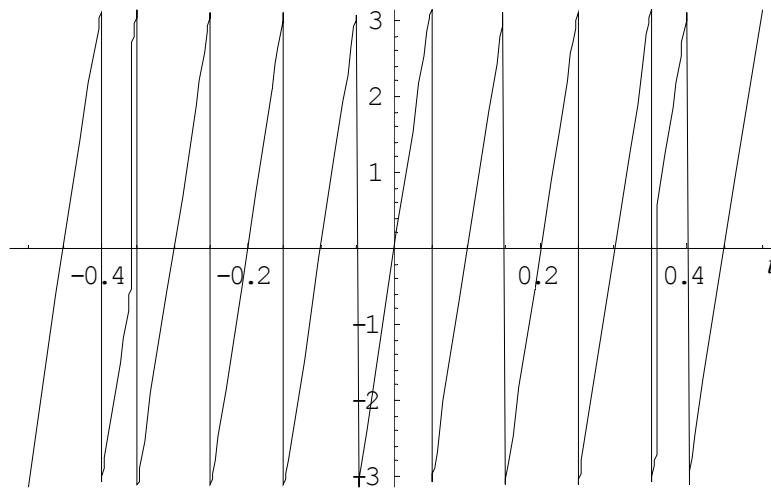
$$A(f) = 2S_+(f) = 2\left(4 - (f - 10)^2\right) \left[\text{rect}\left(\frac{f - 10}{4}\right) \right]$$



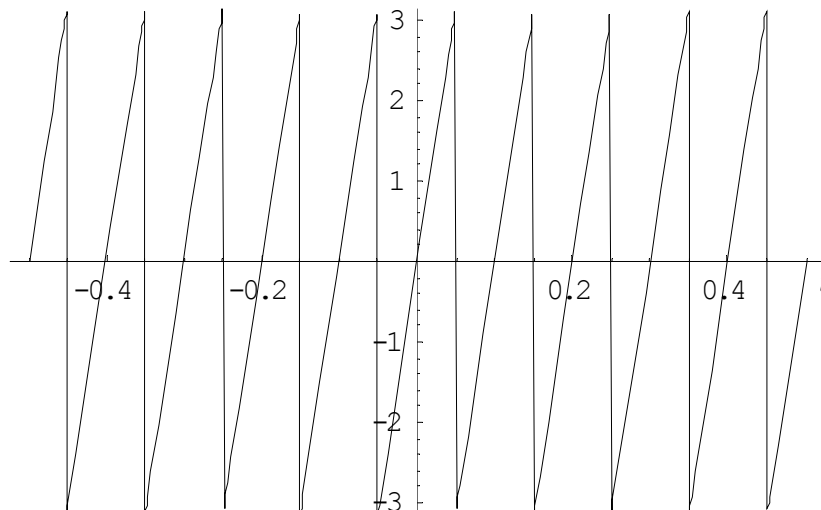
Il segnale analitico $a(t)$ è ottenuto mediante antitrasformazione, in base alla seguente

$$a(t) = F^{-1}\{A(f)\} = 2 \int_8^{12} \left(4 - (f - 10)^2\right) e^{j2\pi ft} df = \frac{e^{j20\pi t} [-4\pi t \cos(4\pi t) + \sin(4\pi t)]}{\pi^3 t^3}$$

Nella figura successiva è mostrato l'andamento della funzione $\text{Arg}[a(t)]$ e sono evidenti l'andamento periodico dovuto alla portante $c(t) = e^{j20\pi t}$ come pure gli "scatti" di fase dovuti alle funzioni $\cos(4\pi t)$ e $\sin(4\pi t)$.

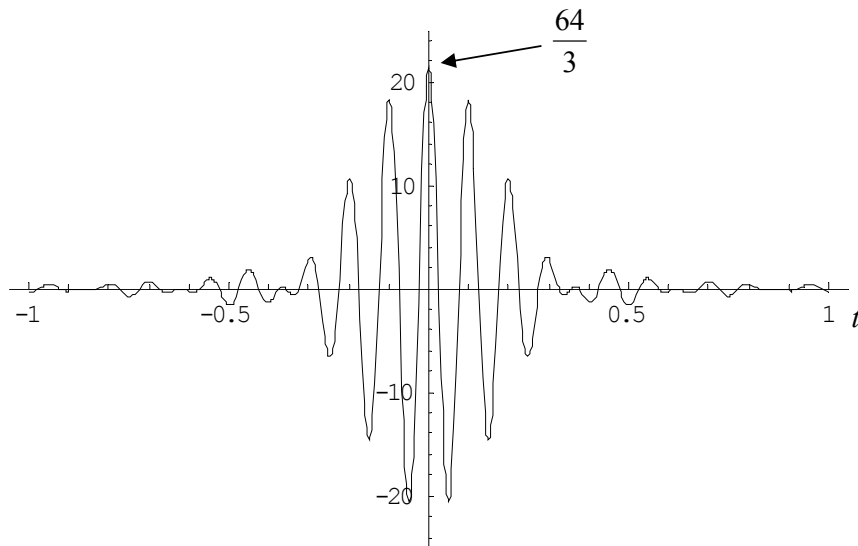


Infatti, per confronto, nella figura successiva è mostrato l'andamento della $\text{Arg}[e^{j20\pi}]$, relativa alla fase della sola “portante”.



Nella figura successiva è mostrato invece il segnale parte reale di $a(t)$ dato dall'espressione

$$\text{Re}\{a(t)\} = \frac{\cos(20\pi) [-4\pi t \cos(4\pi) + \sin(4\pi)]}{\pi^3 t^3}$$

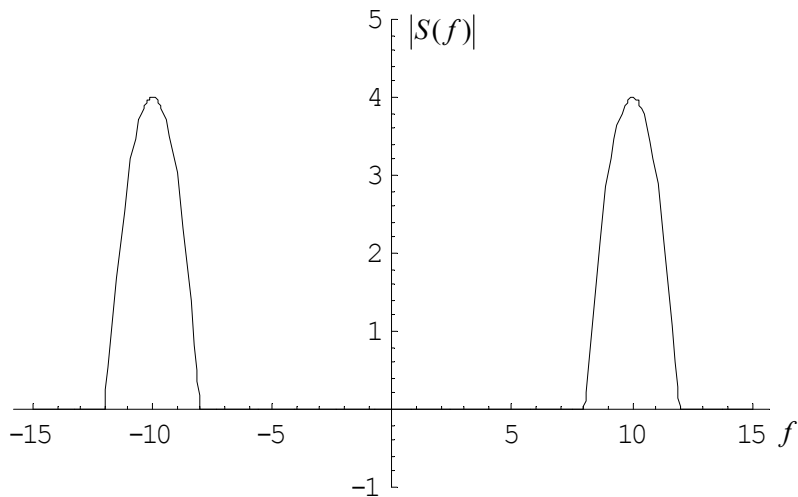


E' ovvio l'andamento oscillatorio smorzato e si è evidenziato il valore limite del segnale per

$$t \rightarrow 0, \text{ dato da } \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{a(t)\} = \frac{64}{3} \cong 21,34$$

La trasformata di Fourier della parte reale di $a(t)$ fornirà, come noto, lo spettro del segnale originario, dato da

$$S(f) = F(\operatorname{Re}\{a(t)\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(20\pi t)[-4\pi t \cos(4\pi t) + \sin(4\pi t)]}{\pi^3 t^3} e^{-j2\pi ft} dt$$



il cui modulo è mostrato nella figura precedente.

L'involuppo complesso del segnale è calcolato per due valori della frequenza f_c : nel primo caso si ottiene uno spettro in banda base simmetrico mentre nel secondo esso è asimmetrico.

Traslazione relativamente ad $f_c = 10$ (spettro simmetrico).

L'andamento dell'involuppo complesso nel dominio del tempo è dato da

$$i(t) = 2 \int_{-2}^{+2} [4 - f^2] e^{j2\pi ft} df = \frac{-4\pi \cos(4\pi t) + \sin(4\pi t)}{\pi^3 t^3}$$

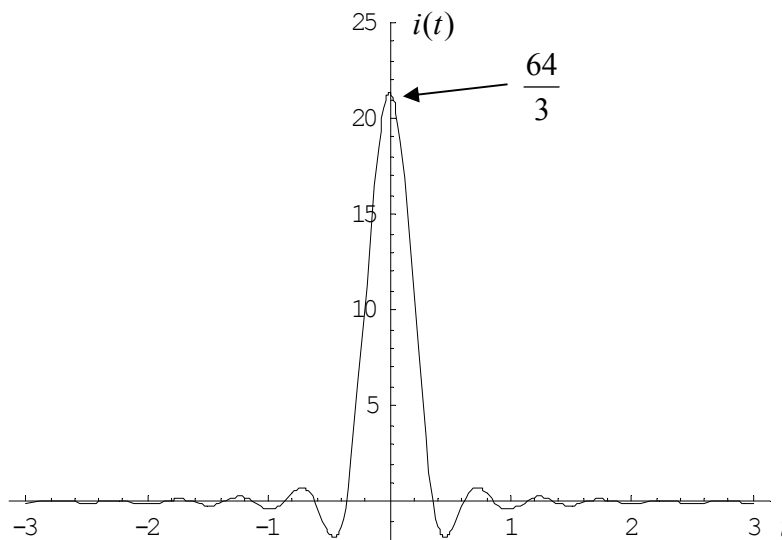
ovvero $i(t)$ risulta in questo caso essere un segnale reale a causa della simmetria del suo spettro.

Lo sviluppo di $i(t)$ in serie polinomiale intorno a $t_0 = 0$ fornisce

$$i(t) \approx \frac{64}{3} - \frac{512\pi^2 t^2}{15} + \frac{2048\pi^4 t^4}{105} + O[t^6]$$

da cui si evince l'ovvia conseguenza che per $t = 0$ $i(t)$ assume il valore di $\frac{64}{3}$.

L'andamento di $i(t)$ è mostrato nella figura seguente.



Traslazione relativamente ad $f_c = 8$ (spettro asimmetrico).

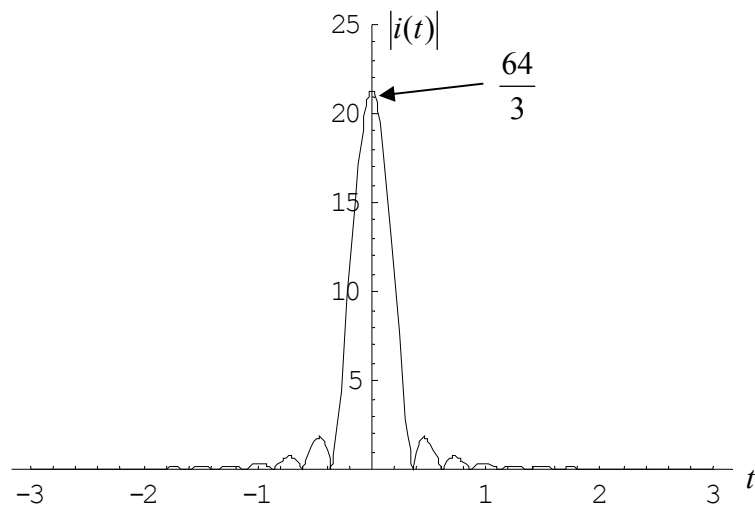
In questo secondo caso l'andamento di $i(t)$ è dato dall'espressione

$$i(t) = 20 \int_{-2}^4 [4 - (f-2)^2] e^{j2\pi ft} dt = 2 \left[\frac{e^{j8\pi t} (-j - 4\pi t)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j + 4\pi t}{4\pi^3 t^3} \right]$$

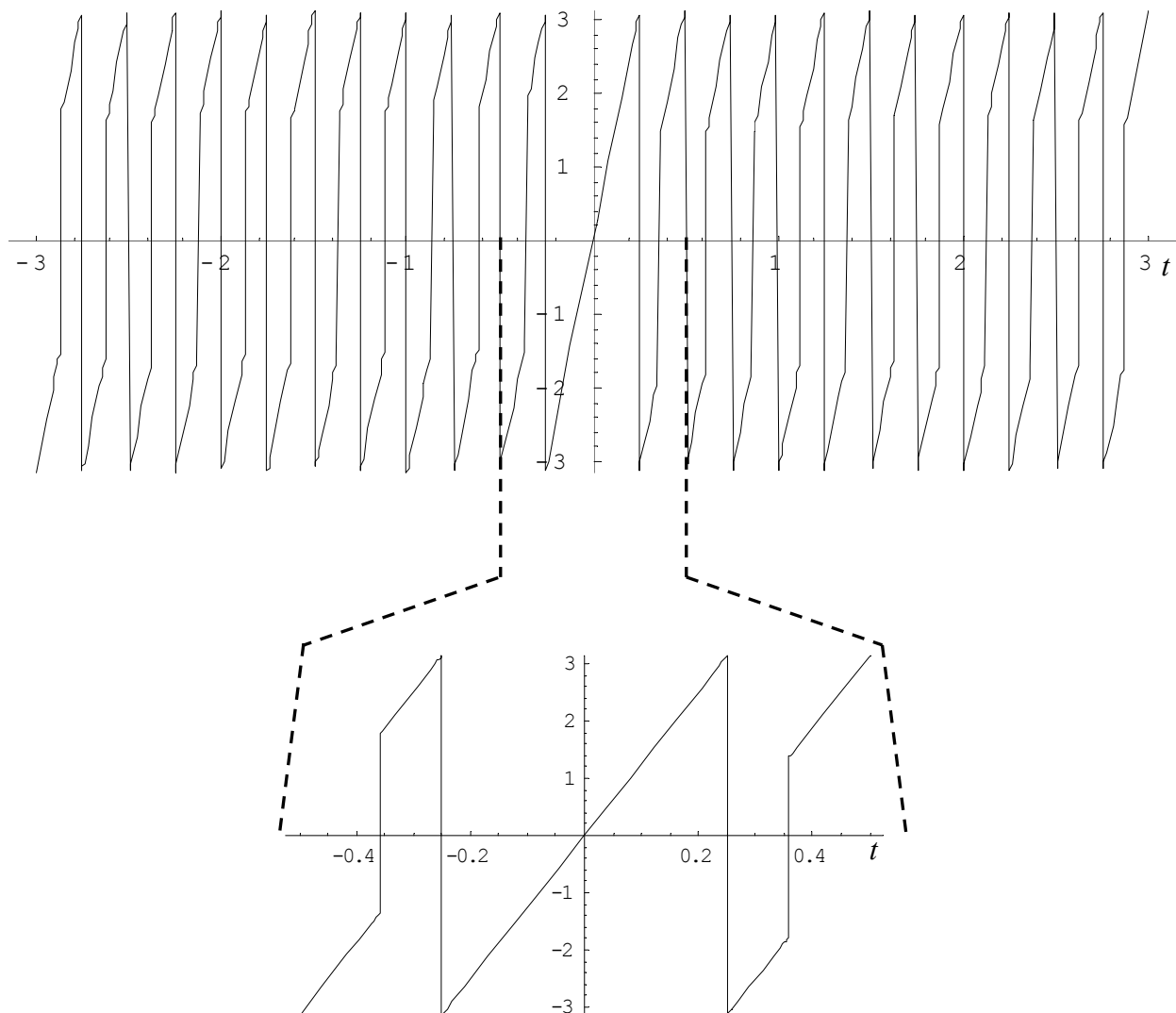
che risulta essere un segnale complesso a causa dell'asimmetria dello spettro in banda-base.

L'andamento del suo modulo è mostrato in figura e, come ovvio, il suo valore per $t = 0$

risulta uguale a $\frac{64}{3}$.



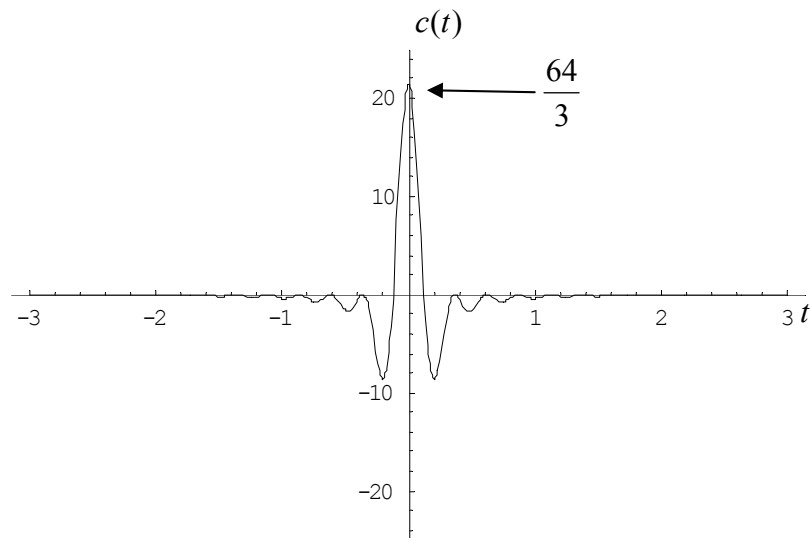
L'andamento della fase $Arg[i(t)]$ è mostrato nella figura successiva in cui si è evidenziata una porzione del segnale intorno all'origine per metterne in evidenza l'andamento dispari della fase.



La componente in fase $c(t)$ di $i(t)$ è ottenuta calcolandone la parte reale, data da

$$c(t) = \operatorname{Re}\{i(t)\} = \left| 2 \left[\frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi t)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi t}{4\pi^3 t^3} \right] \right| \cos \left\{ \operatorname{Arg} \left[\frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi t)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi t}{4\pi^3 t^3} \right] \right\}$$

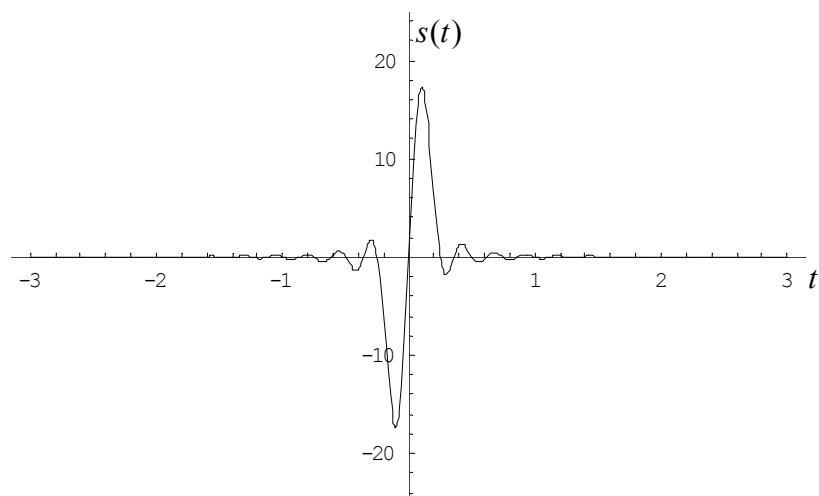
il cui andamento è mostrato nella figura seguente. $c(t)$ risulta essere una funzione pari ed il suo valore per $t = 0$ è ovviamente pari a $\frac{64}{3}$.



La componente in quadratura $s(t)$ di $i(t)$ risulta espressa dalla relazione

$$s(t) = \left| 2 \left[\frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi t)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi t}{4\pi^3 t^3} \right] \right| \sin \left\{ \operatorname{Arg} \left[\frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi t)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi t}{4\pi^3 t^3} \right] \right\}$$

ed il suo andamento, di tipo dispari, è mostrato nella figura successiva



I due andamenti mostrati separatamente possono essere rappresentati in maniera sintetica nel piano $\text{Re}\{i(t)\} - \text{Im}\{i(t)\}$ così da ottenere la figura successiva in cui è messo in evidenza l'istante $t = 0$. Ovviamente, in ogni istante il vettore che congiunge l'origine degli assi con il punto della curva rappresentativa fornisce modulo e fase dell'involuppo complesso. Si ricorda altresì che nel caso di una portante pura, di ampiezza A , la corrispondente curva rappresentativa su tale piano è data da una circonferenza di raggio A .

