

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

Corso di

Segnali e Trasmissione

Betti – Luglio - Leo

II Esercitazione 2004

Ver. 1.0

Anno Accademico 2003/04

Esercizio 1

Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) e^{-a|t|}$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio si possono applicare 2 metodi.

I metodo

Si ricorda che il prodotto di 2 segnali nel tempo da luogo alla convoluzione dei 2 segnali in frequenza:

$$x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \Rightarrow F\{x_1(t)\} * F\{x_2(t)\}$$

Per cui se:

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow F\{x_1(t)\} = F\{\cos(\omega_0 t)\}$$

$$x_2(t) = e^{-a|t|} \Rightarrow F\{x_2(t)\} = F\{e^{-a|t|}\}$$

Si ha che:

$$F\{x(t)\} = F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = F\{\cos(\omega_0 t) \cdot e^{-a|t|}\} = F\{\cos(\omega_0 t)\} * F\{e^{-a|t|}\}$$

Poiché:

$$F\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

e

$$F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = F\{\cos(\omega_0 t) \cdot e^{-a|t|}\} = F\{\cos(\omega_0 t)\} * F\{e^{-a|t|}\} = \\ &= \left[\frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \right] * \left[\frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right] = \frac{1}{2} \left\{ \left[\delta(\omega + \omega_0) * \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right] + \left[\delta(\omega - \omega_0) * \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = \int y(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

e che:

$$\int f(\xi) \delta(\xi - \omega_0) d\xi = f(\omega_0)$$

Per cui si ha:

$$\delta(\omega) * f(\omega) = \int f(\xi) \delta(\omega - \xi) d\xi = f(\omega)$$

$$\delta(\omega - \omega_0) * f(\omega) = \int f(\xi) \delta(\omega - \omega_0 - \xi) d\xi = f(\omega - \omega_0)$$

Essendo:

$$f(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Si ha che:

$$\delta(\omega + \omega_0) * \frac{2a}{\omega^2 + a^2} = \int \frac{2a}{\xi^2 + a^2} \delta(\omega + \omega_0 - \xi) d\xi = \frac{2a}{(\omega + \omega_0)^2 + a^2}$$

$$\delta(\omega - \omega_0) * \frac{2a}{\omega^2 + a^2} = \int \frac{2a}{\xi^2 + a^2} \delta(\omega - \omega_0 - \xi) d\xi = \frac{2a}{(\omega - \omega_0)^2 + a^2}$$

E quindi:

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\delta(\omega + \omega_0) * \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right] + \left[\delta(\omega - \omega_0) * \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right] \right\} = \left[\frac{a}{(\omega + \omega_0)^2 + a^2} + \frac{a}{(\omega - \omega_0)^2 + a^2} \right] = \\ &= \left[\frac{a}{\omega^2 + 2\omega\omega_0 + \omega_0^2 + a^2} + \frac{a}{\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2 + a^2} \right] = 2 \left[\frac{a \cdot (\omega^2 + a^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 + a^2 + \omega_0^2)^2 - 4\omega^2\omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

Il metodo

Si introduce, in questo caso la proprietà della modulazione. Tale proprietà permette, tramite il prodotto tra segnale $x(t)$ per una funzione trigonometrica $\cos(\omega_0 t)$ o $\sin(\omega_0 t)$, di ottenere spettri in frequenza traslati di $\pm \omega_0$.

Infatti se si ha un segnale $x(t)$ per il quale esiste la trasformata $X(\omega) = F\{x(t)\}$ si ha che:

$$\begin{cases} F\{x(t) \sin(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2j} [X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)] \\ F\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \end{cases}$$

Rappresentabili in frequenza:

$$\begin{cases} F\{x(t) \sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j} [X(f - f_0) - X(f + f_0)] \\ F\{x(t) \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)] \end{cases}$$

Poiché risulta per il coseno:

$$\begin{aligned} F\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} &= \int x(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \int x(t) \left[\frac{e^{+j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int x(t) e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

Per il seno:

$$F\{x(t) \sin(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2j} [X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)]$$

Quindi essendo, nel caso in esame, $x(t) = \cos(\omega_0 t) e^{-a|t|}$ si può ottenere la trasformata ponendo direttamente:

$$x'(t) = e^{-a|t|} \Rightarrow F\{x'(t)\} = F\{e^{-a|t|}\} = X'(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

Ci si può ricondurre, quindi, al caso della modulazione per cui:

$$\begin{aligned} F\{x'(t) \cos(2\pi f t)\} &= \frac{1}{2} [X'(\omega - \omega_0) + X'(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} \left[\frac{2a}{(\omega - \omega_0)^2 + a^2} + \frac{2a}{(\omega + \omega_0)^2 + a^2} \right] = \\ &= \left[\frac{a}{\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2 + a^2} + \frac{a}{\omega^2 + 2\omega\omega_0 + \omega_0^2 + a^2} \right] = 2 \left[\frac{a \cdot (\omega^2 + a^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 + a^2 + \omega_0^2)^2 - 4\omega^2\omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

Esercizio 2

Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$ con $T > 0$ dove:

$$x(t) = e^{-\frac{t}{T}} u(t)$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio si applica è sufficiente applicare la definizione di trasformata alla funzione $x(t)$.

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)t} dt = \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)} \int_0^{+\infty} -\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right) e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)t} dt = \left[-\frac{1}{\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)} e^{-\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\left(\frac{1}{T} + j2\pi f\right)} = \frac{T}{1 + j2\pi f T} \end{aligned}$$

Si può notare che la trasformata di Fourier ottenuta può essere scritta anche, tramite la notazione complessa, in parte reale e parte immaginaria.

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= \frac{T}{1 + j2\pi f T} = T \cdot \frac{(1 - j2\pi f T)}{(1 + j2\pi f T) \cdot (1 - j2\pi f T)} = T \cdot \frac{(1 - j2\pi f T)}{1 + (2\pi f T)^2} = \\ &= \frac{T}{1 + (2\pi f T)^2} + j \frac{-2\pi f T^2}{1 + (2\pi f T)^2} = X_R(f) + X_I(f) \end{aligned}$$

Ricordando che si possono utilizzare le notazioni in modulo e argomento per $T > 0$:

$$\begin{aligned} |X(f)| &= \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)} = \sqrt{\left(\frac{T}{1 + (2\pi f T)^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\pi f T^2}{1 + (2\pi f T)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{T^2 + (2\pi f T^2)^2}{(1 + (2\pi f T)^2)^2}} = T \sqrt{\frac{1 + (2\pi f T)^2}{(1 + (2\pi f T)^2)^2}} = \\ &= T \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi f T)^2}} = \frac{T}{(1 + (2\pi f T)^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \text{Arg}\{X(f)\} &= \arctg\left\{\frac{X_I(f)}{X_R(f)}\right\} + \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{X_R(f)}{|X_R(f)|}\right) = \arctg\left\{\frac{\frac{-2\pi f T^2}{1 + (2\pi f T)^2}}{\frac{T}{1 + (2\pi f T)^2}}\right\} = \arctg\left\{\frac{-2\pi f T^2}{T}\right\} = \arctg\{-2\pi f T\} \end{aligned}$$

Per cui la trasformata si può scrivere in forma polare: $X(f) = \frac{T \cdot e^{\arctg\{-2\pi f T\}}}{(1 + (2\pi f T)^2)^{\frac{1}{2}}}$

Esercizio 3

Determinare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$:

$$x(t) = A e^{-a|t|}$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio è sufficiente applicare la definizione di trasformata alla funzione $x(t)$.

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= F\{A e^{-a|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{at} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt + \\ &+ A \int_0^{+\infty} e^{-at} [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \cos(\omega t) dt - j A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} \sin(\omega t) dt = \\ &= 2 A \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt = 2 A \Re \left[\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \right] = 2 A \Re \left[\int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \right] = 2 A \Re \left[\frac{1}{a+j\omega} \right] = \\ &= 2 A \Re \left[\frac{(a+j\omega)}{(a-j\omega)(a+j\omega)} \right] = 2 A \Re \left[\frac{(a+j\omega)}{\omega^2 + a^2} \right] = 2 A \Re \left[\frac{a}{\omega^2 + a^2} + j \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} \right] = \frac{2 A a}{\omega^2 + a^2} \end{aligned}$$

Un altro metodo per fare il calcolo della trasformata di Fourier è il seguente:

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= F\{e^{-a|t|}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + A \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{a-j\omega} + \frac{A}{a+j\omega} = \frac{Aa + Aj\omega - Aj\omega + Aa}{\omega^2 + a^2} = \frac{2 A a}{\omega^2 + a^2} = \frac{2 A a}{4\pi^2 f^2 + a^2} \end{aligned}$$

Esercizio 4

Determinare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$:

$$x(t) = e^{-\pi t^2}$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio è sufficiente applicare la definizione di trasformata alla funzione $x(t)$.

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= F\{e^{-\pi t^2}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi t^2 + j2\pi f t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t^2 + j2ft)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t^2 + j2ft)} e^{-\pi f^2} e^{+\pi f^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t^2 + j2ft - f^2)} e^{-\pi f^2} dt = e^{-\pi f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t^2 + j2ft - f^2)} dt = \\ &= e^{-\pi f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t+jf)^2} dt \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Per cui per } \alpha = \pi \text{ si ha: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t+jf)^2} dt = \left(\frac{\pi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

La trasformata risulta:

$$F\{e^{-\pi t^2}\} = e^{-\pi f^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(t+jf)^2} dt = e^{-\pi f^2} = e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$$

Esercizio 5

Determinare la trasformata di Fourier del seguente segnale $x(t)$:

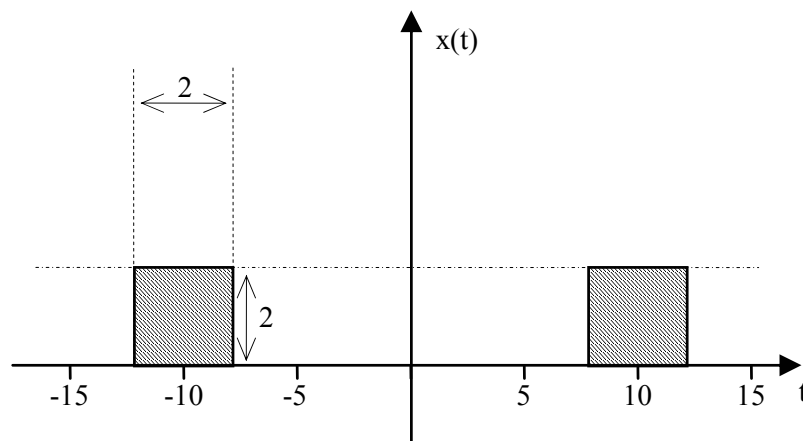
$$x(t) = A \left\{ \text{rect} \left[\left(\frac{t - \tau}{T} \right) \right] + \text{rect} \left[\left(\frac{t + \tau}{T} \right) \right] \right\}$$

Dove i valori dei parametri sono:

$$\begin{cases} A = 2 \\ T = 2 \\ \tau = 10 \end{cases}$$

Soluzione

Il segnale $x(t)$ è la somma di due segnali rect , di uguale altezza A e uguale durata T , traslati del tempo τ come in figura:



Possiamo considerare il segnale $x(t)$ come la somma di 2 segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ per cui risulta:

$$x(t) = A \left\{ \text{rect} \left[\left(\frac{t - \tau}{T} \right) \right] + \text{rect} \left[\left(\frac{t + \tau}{T} \right) \right] \right\} = x_1(t) + x_2(t)$$

E la trasformata di $x(t)$ come la somma delle singole trasformate:

$$F\{x(t)\} = F\{x_1(t) + x_2(t)\} = F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\}$$

Quindi, per risolvere l'esercizio, si ricorda prima la trasformata di Fourier del segnale

$rect\left(\frac{t}{T}\right)$:

$$F\{x(t)\} = F\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega}$$

per $z = j\omega t$

$$\begin{aligned} F\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\} &= \frac{1}{j\omega} \int_{-\frac{j\omega T}{2}}^{\frac{j\omega T}{2}} e^{-z} dz = \frac{1}{j\omega} \left[e^{-z} \right]_{\frac{j\omega T}{2}}^{-\frac{j\omega T}{2}} = \frac{e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{j\omega} = \frac{2\left(e^{j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right)}{j2\omega} = \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{2\pi f T}{2}\right)}{\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{2\pi f T}{2}\right)}{2\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(fT) \end{aligned}$$

Tramite questa trasformazione possiamo eseguire le trasformate dei singoli contributi:

$$x_1(t) = A \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \Rightarrow X_1(f) = AT \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \tau}$$

$$x_2(t) = A \text{rect}\left(\frac{t+\tau}{T}\right) \Rightarrow X_2(f) = AT \text{sinc}(fT) e^{+j2\pi f \tau}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} F\{x(t)\} &= F\{x_1(t) + x_2(t)\} = F\{x_1(t)\} + F\{x_2(t)\} = X_1(f) + X_2(f) = \\ &= AT \text{sinc}(fT) e^{+j2\pi f \tau} + AT \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f \tau} = AT \text{sinc}(fT) \left[e^{+j2\pi f \tau} + e^{-j2\pi f \tau} \right] = \\ &= 2AT \text{sinc}(fT) \left[\frac{e^{+j2\pi f \tau} + e^{-j2\pi f \tau}}{2} \right] = 2AT \text{sinc}(fT) \cos(2\pi f \tau) \end{aligned}$$

Sostituendo i valori dati:

$$F\{x(t)\} = 8 \text{sinc}(2f) \cos(20\pi f) = 8 \text{sinc}(2f) \cos(10\omega)$$

Esercizio 6

Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$x(t) = \left[A \sin(\omega_0 t) e^{-a|t|} \right] u(t)$$

Soluzione

Per trovare la soluzione si possono fare 2 passi:

I passo: Applicare le proprietà della modulazione

II passo: Ricordare la trasformata: $F\{e^{-a|t|}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega} = X(\omega)$

Per cui si ha:

$$\begin{aligned} F\{A \sin(\omega_0 t) e^{-a|t|} u(t)\} &= \frac{1}{2j} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2j} X(\omega + \omega_0) = \frac{A}{2j} \left[\frac{1}{a + j(\omega - \omega_0)} - \frac{1}{a + j(\omega + \omega_0)} \right] = \\ &= \frac{A\omega_0}{\omega_0^2 + (a + j\omega)^2} \end{aligned}$$

Esercizio 7

Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Soluzione

Per trovare la soluzione si possono fare 2 passi:

I passo: Applicare le proprietà della modulazione

II passo: Ricordare la trasformata: $F\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \operatorname{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right) = X(\omega)$

Per cui si ha:

$$F\left\{\cos(\omega_0 t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \frac{1}{2} \left\{ T \operatorname{sinc}\left[\frac{T(\omega - \omega_0)}{2\pi}\right] + T \operatorname{sinc}\left[\frac{T(\omega + \omega_0)}{2\pi}\right] \right\}$$

Esercizio 8

Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$x(t) = \{\cos[2\omega_0(t - t_0)]\} - \{\sin^2(\omega_0 t)e^{j\omega_1 t}\} = x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow X(\omega) = X_1(\omega) - X_2(\omega)$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio si debbono trovare prima le trasformate dei singoli segnali:

$$F\{\cos(2\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)]$$

Per cui:

$$X_1(\omega) = F\{\cos[2\omega_0(t - t_0)]\} = \frac{1}{2}[\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)]e^{-j\omega t_0}$$

Per quanto riguarda la II trasformata, applicando le formule di bisezione:

$$\begin{aligned} F\{\sin^2 \omega_0 t\} &= F\left\{\frac{1 - \cos(2\omega_0 t)}{2}\right\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}F\{\cos(2\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}F\{1\} - \frac{1}{2}F\{\cos(2\omega_0 t)\} = \\ &= \frac{1}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{4}[\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)] \end{aligned}$$

Per cui:

$$F\{\sin^2(\omega_0 t)e^{j\omega_1 t}\} = \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_1) - \frac{1}{4}[\delta(\omega - 2\omega_0 - \omega_1) + \delta(\omega + 2\omega_0 - \omega_1)]$$

Mettendo insieme i due risultati:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_1(\omega) - X_2(\omega) = \frac{1}{2}[\delta(\omega - 2\omega_0) + \delta(\omega + 2\omega_0)]e^{-j\omega t_0} - \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_1) + \\ &+ \frac{1}{4}[\delta(\omega - 2\omega_0 - \omega_1) + \delta(\omega + 2\omega_0 - \omega_1)] \end{aligned}$$