

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

Corso di
Segnali e Trasmissioni

Betti – Luglio - Giaconi

Esercitazione IV

Ver. 1.1

Anno Accademico 2007/08

Esercizio 1

Determinare la funzione di trasferimento di un quadripolo LTI, detto filtro adattato, che trasforma un segnale di energia $x(t)$ in una risposta coincidente, a meno di un ritardo, con la funzione di autocorrelazione di $x(t)$. Si determini la condizione di causalità per $x(t)$.

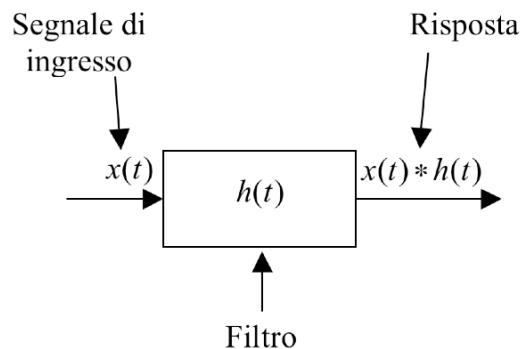
Soluzione

Per risolvere l'esercizio si deve, in primo luogo, considerare la funzione di autocorrelazione del segnale. La risposta del filtro, eccitato dal segnale $x(t)$, deve essere pari proprio a questa funzione.

Si ricorda che l'espressione della funzione di autocorrelazione:

$$C_{xx}(\tau) = \int x(t + \tau) x^*(t) dt$$

Poiché la risposta del filtro deve avere questa forma e siamo nella situazione per cui:



Definiamo $h(t)$ la risposta del filtro. Ricordando che il prodotto di convoluzione è definito come:

$$y(t) = \int x(\tau) h(t - \tau) d\tau = C_{xx}(\tau) = x(t) * h(t)$$

Si ha che, affinché la risposta del filtro sia uguale alla funzione di autocorrelazione, deve essere soddisfatta la relazione:

$$C_{xx}(\tau) = \int x(t + \tau) x^*(t) dt = x(t) * x^*(-t)$$

Per cui si ha immediatamente che:

$$h(t) = x^*(-t)$$

Passando alla trasformata di Fourier:

$$H(f) = X^*(f)$$

Poiché si vuole la presenza di un ritardo t_0 si ha che:

$$h(t - t_0) = x^*(-(t - t_0)) = x^*(-t + t_0)$$

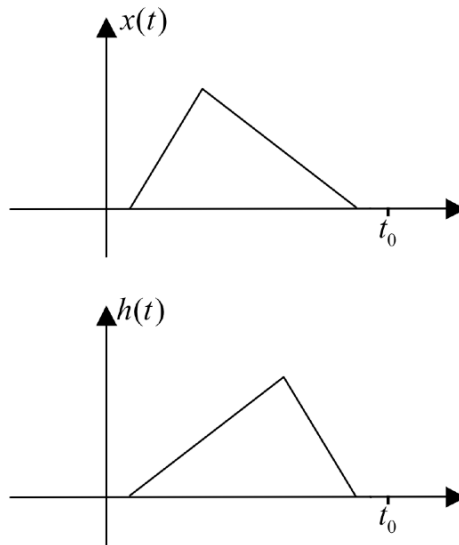
Per cui applicando la trasformata di Fourier si ha che:

$$H(f) = X^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Per ottenere la causalità dobbiamo imporre che la condizione

$$x^*(-(t - t_0)) = x^*(-t + t_0) = 0 \text{ per } \forall t < 0, \text{ ossia che } x(t) = 0 \text{ per } -t + t_0 < 0 \text{ ovvero valida } \forall t > t_0.$$

Un esempio di funzione per il filtro adattato è mostrato in figura:



Esercizio 2

Dimostrare che due qualsiasi elementi della famiglia di segnali $\frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$ con k intero, che non risultino separate nel dominio del tempo né nel dominio della frequenza, siano ortogonali, cioè che il prodotto scalare di due segnali della famiglia è nullo.

Soluzione

Consideriamo 2 segnali della famiglia definita nel testo dell'esercizio:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T} - h\right)$$

1. Verificare che i segnali non risultano separati nel tempo.

Il prodotto delle funzioni di base definite è nullo, $x(t) \cdot y(t) = 0$, solo nei punti nT con n intero e quindi esse non sono separate nel dominio del tempo.

2. Verificare che i segnali non risultano separati in frequenza.

Ricordiamo prima la trasformata di Fourier della funzione sinc:

$$F\left\{\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \text{rect}(fT)$$

Se si considera anche la traslazione:

$$F\left\{\text{sinc}\left(\frac{t}{T} - k\right)\right\} = T \text{rect}(fT) e^{-j2\pi f k T}$$

Per cui, applicando la trasformazione alle funzioni di base, si ha:

$$F\{x(t)\} = X(f) = \sqrt{T} \text{rect}(fT) e^{-j2\pi f k T}$$

$$F\{y(t)\} = Y(f) = \sqrt{T} \text{rect}(fT) e^{-j2\pi f h T}$$

Il prodotto delle trasformate di Fourier risulta quindi:

$$X(f) \cdot Y(f) = \sqrt{T} \text{rect}(fT) e^{-j2\pi f (k+h) T}$$

Per cui risulta che i segnali non sono separati in frequenza poiché il loro prodotto non è sempre nullo.

3. Verificare che il prodotto scalare di due segnali della famiglia è nullo.

Se calcoliamo lo spettro di energia tra due segnali della famiglia abbiamo che:

$$E_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f) = \text{Trect}(fT) e^{-j2\pi f(k-h)T}$$

Per cui l'anti-trasformata risulterà pari alla funzione di intercorrelazione:

$$C_{xy}(\tau) = F^{-1}\{E_{xy}(f)\} = \text{sinc}\left[\frac{\tau}{T} - (k-h)\right]$$

Che calcolata in $\tau = 0$ fornirà il prodotto scalare tra le funzioni di base:

$$\langle x, y \rangle = C_{xy}(\tau)\big|_{\tau=0} = C_{xy}(0) = \text{sinc}[(k-h)] = \frac{\sin[\pi(k-h)]}{\pi(k-h)} = 0 \quad \forall k, h \text{ interi}$$

Esercizio 3

Data la famiglia di segnali $x_i = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + (i-1)\frac{\pi}{2}\right]$ con $t \in [0, T]$ e $i = 1, 2, 3, 4$, determinare la base ortonormale (indicando la dimensione) ed i vettori rappresentativi dei segnali della base.

Soluzione

Per risolvere l'esercizio si ricorda innanzitutto che:

$$\Psi_k = \frac{W_k(t)}{\|W_k(t)\|}$$

avendo definito: $\|W_k(t)\| = \left(\int |W_k(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

Definita la famiglia $x_i = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + (i-1)\frac{\pi}{2}\right]$ con $t \in [0, T]$ e $i = 1, 2, 3, 4$ si possono scrivere le singole funzioni:

$$x_1 = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t\right], \quad x_2 = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right], \quad x_3 = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \pi\right], \quad x_4 = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \frac{3\pi}{2}\right]$$

Posto $W_1(t) = x_1(t)$ si può dunque scrivere l'espressione del I vettore di base:

$$\Psi_1 = \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|} = \frac{1}{\|x_1(t)\|} \cos\left[\frac{2\pi}{T}t\right]$$

Avendo calcolato il valore di $\|x_1(t)\|$ come:

$$\begin{aligned} \|x_1(t)\| &= \left(\int_0^T |x_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T \cos^2\left[\frac{2\pi}{T}t\right] dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\int_0^T \left(1 + \cos\left[\frac{4\pi}{T}t\right] \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2}t \Big|_0^T + \frac{T}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \Big|_0^T \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

Mettendo insieme i risultati si ha che:

$$\Psi_1 = \frac{x_1(t)}{\|x_1(t)\|} = \frac{1}{\|x_1(t)\|} \cos\left[\frac{2\pi}{T}t\right] = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}t\right]$$

Avendo calcolato il I vettore, posto $W_2(t) = x_2(t) - \langle x_2(t), \Psi_1(t) \rangle \Psi_1(t)$, si può dunque scrivere l'espressione del II vettore di base come:

$$\Psi_2 = \frac{W_2(t)}{\|W_2(t)\|}$$

Calcoliamo dapprima il prodotto scalare $\langle x_2(t), \Psi_1(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x_2(t), \Psi_1(t) \rangle &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = -\sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = -\sqrt{\frac{1}{2T}} \int_0^T \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) dt = \sqrt{\frac{1}{2T}} \frac{T}{4\pi} \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \Big|_0^T = \sqrt{\frac{1}{2T}} \frac{T}{4\pi} [1 - 1] = 0 \end{aligned}$$

Per cui risulta che: $W_2(t) = x_2(t) - 0 \cdot \Psi_1(t) = x_2(t)$

$$\text{E quindi che: } \Psi_2 = \frac{x_2(t)}{\|x_2(t)\|} = -\frac{1}{\|x_2(t)\|} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Se si calcola $\|x_2(t)\|$:

$$\begin{aligned} \|x_2(t)\| &= \left(\int_0^T |x_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T \left| \sin\left[\frac{2\pi}{T}t\right] \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\int_0^T \left(1 - \cos\left[\frac{4\pi}{T}t\right] \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{2} t \Big|_0^T - \frac{T}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) \Big|_0^T \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

Sostituendo si ha il II vettore della base:

$$\Psi_2 = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Avendo calcolato il II vettore, posto $W_3(t) = x_3(t) - \sum_{i=1}^2 \langle x_3(t), \Psi_i(t) \rangle \Psi_i(t)$, si può dunque scrivere l'espressione del III vettore di base come:

$$\Psi_3 = \frac{W_3(t)}{\|W_3(t)\|}$$

Poiché risulta:

$$\langle x_3(t), \Psi_1(t) \rangle = -\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$\langle x_3(t), \Psi_2(t) \rangle = 0$$

Si ha che:

$$W_3(t) = x_3(t) + \sqrt{\frac{T}{2}}\Psi_1 = -\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \left(\sqrt{\frac{T}{2}}\right)\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0$$

Il vettore $\Psi_3 = \frac{W_3(t)}{\|W_3(t)\|} = 0$ e quindi non concorre a formare una base in quanto può

essere espresso in funzione di Ψ_1 come si può notare dalla seguente espressione:

$$x_3(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = -\sqrt{\frac{T}{2}}\Psi_1$$

Si può dimostrare una analoga proprietà per il vettore Ψ_4 , pertanto risulta:

$$\Psi_4 = \frac{W_4(t)}{\|W_4(t)\|} = 0$$

La base è quindi costituita da 2 funzioni:

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad \Psi_2 = -\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Una rappresentazione della famiglia di funzioni tramite la base Ψ_1 e Ψ_2 può essere:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{T}{2}}, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}; \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} 0, \sqrt{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

$$x_3(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{T}{2}}, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}; \quad x_4(t) = \begin{pmatrix} 0, -\sqrt{\frac{T}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4

Assegnate le funzioni Φ_i ($i=1,2,3$), definite tutte per $t \in [0,1]$, determinare se sono mutuamente ortogonali.

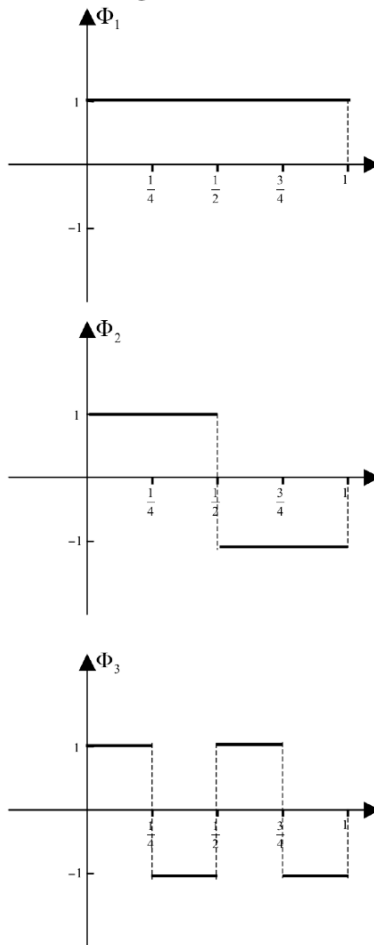
$$\Phi_1 = 1 \quad t \in [0,1]$$

$$\Phi_2 = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -1 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

$$\Phi_3 = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]; t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ -1 & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]; t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Soluzione

Per risolvere l'esercizio esaminiamo un grafico delle funzioni:



Per risolvere l'esercizio calcoliamo i prodotti scalari mutui:

$$\langle \Phi_1(t), \Phi_2(t) \rangle = \int_0^{\frac{1}{2}} \Phi_1(t) \Phi_2^*(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) dt = 0$$

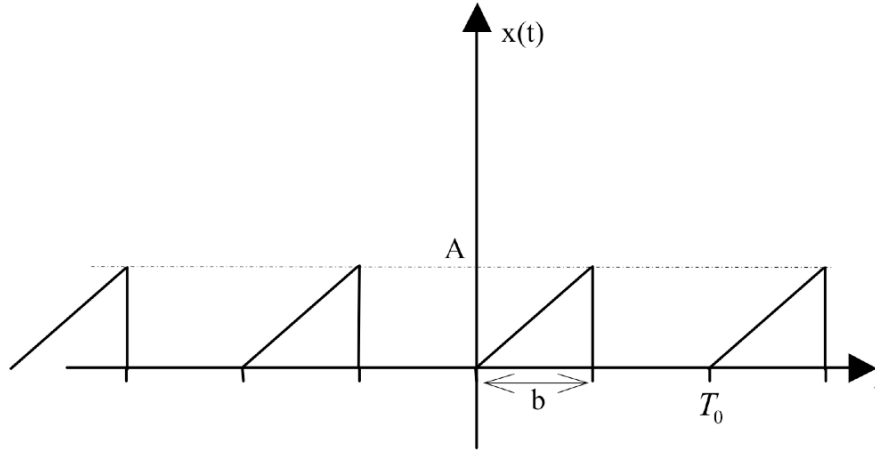
$$\langle \Phi_2(t), \Phi_3(t) \rangle = \int_0^{\frac{1}{4}} \Phi_2(t) \Phi_3^*(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (-1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (-1) dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 (1) dt = 0$$

$$\langle \Phi_1(t), \Phi_3(t) \rangle = \int_0^{\frac{1}{4}} \Phi_1(t) \Phi_3^*(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (-1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (1) dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 (-1) dt = 0$$

Si può concludere che i segnali sono mutuamente ortogonali.

Esercizio 5

Dato il segnale rappresentato in figura:



Si determini:

1. La funzione di autocorrelazione
2. La densità spettrale di potenza
3. La potenza media

Soluzione

Il segnale rappresentato può essere descritto dalla funzione:

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0} t & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

che può essere riscritta come:

$$x_1(t) = \left(\frac{2A}{T_0} t \right) \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{\frac{T_0}{2}} \right)$$

Che, avendo periodo di ripetizione T_0 , può essere scritta come:

$$x(t) = \text{rep}_{T_0} \{ x_1(t) \} = \text{rep}_{T_0} \left\{ \left(\frac{2A}{T_0} t \right) \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T_0}{2}}{\frac{T_0}{2}} \right) \right\} = \sum_k x_1(t - kT_0)$$

É un segnale periodico e, quindi, per la funzione di autocorrelazione si ha:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_1^*(t) x_1(t + \tau) dt$$

Per cui, per $\tau \leq 0$:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau}^{\frac{T_0}{2}} \left[\frac{2A}{T_0} t \right] \left[\frac{2A}{T_0} (t + \tau) \right] dt = \frac{4A^2}{T_0^3} \int_{-\tau}^{\frac{T_0}{2}} (t^2 + \tau t) dt = \frac{4A^2}{T_0^3} \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{\tau}{2} t^2 \right]_{-\tau}^{\frac{T_0}{2}} = \\ &= \frac{A^2}{6T_0^3} [T_0^3 + 3\tau T_0^2 - 4\tau^3] \end{aligned}$$

Per cui, per $\tau > 0$:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_0^{-\tau + \frac{T_0}{2}} \left[\frac{2A}{T_0} t \right] \left[\frac{2A}{T_0} (t + \tau) \right] dt = \frac{4A^2}{T_0^3} \int_0^{-\tau + \frac{T_0}{2}} (t^2 + \tau t) dt = \frac{4A^2}{T_0^3} \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{\tau}{2} t^2 \right]_0^{-\tau + \frac{T_0}{2}} = \\ &= \frac{A^2}{6T_0^3} [T_0^3 - 3\tau T_0^2 + 4\tau^3] \end{aligned}$$

E, quindi, componendo le parti:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{6T_0^3} [T_0^3 - 3|\tau|T_0^2 + 4|\tau|^3]$$

Per il calcolo della densità spettrale di potenza, essendo $x(t)$ periodico, si ha:

$$x(t) = \sum_k c_k e^{j2\pi F_0 k t}$$

dove si ha che $c_k = F_0 X_1(kF_0)$ e che $X_1(f) = F\{x_1(t)\}$.

Per cui, ricordando il calcolo la trasformata di Fourier di un segnale di potenza (pg. 79 teoria), si ha che :

$$F\{x(t)\} = \sum_k c_k \delta(f - kF_0)$$

E che lo spettro di potenza (pg. 80 teoria) risulta:

$$P_{xx}(f) = \sum |c_k|^2 \delta(f - kF_0) = \frac{1}{T_0^2} \sum |X(kF_0)|^2$$

Poichè $X_1(f)$ è pari a:

$$X_1(f) = \frac{2A}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} t e^{-j2\pi f t} dt = \frac{2A}{T_0} \left[\frac{e^{-j2\pi f T_0}}{(j2\pi f)^2} - \frac{T_0}{2} \frac{e^{-j2\pi f T_0}}{j2\pi f} - \frac{1}{(j2\pi f)^2} \right]$$

La potenza media si calcola su un periodo:

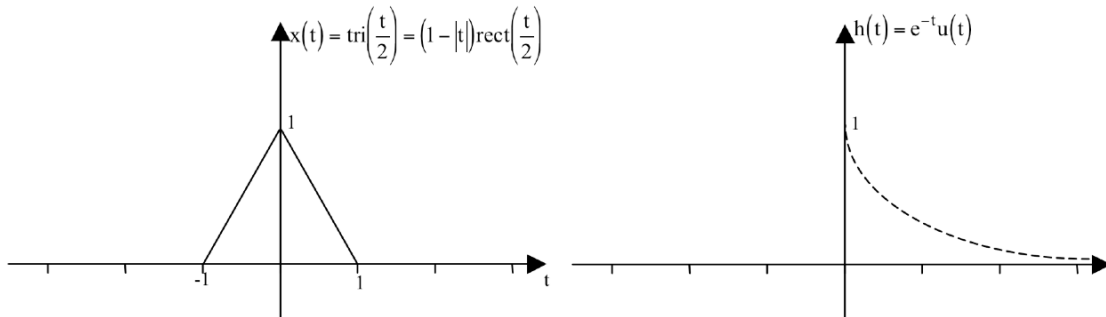
$$P_{xx} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x_1(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \frac{4A^2}{T_0^2} t^2 dt = \frac{4A^2}{T_0^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{A^2}{6} = R_{xx}(0)$$

Esercizio 6

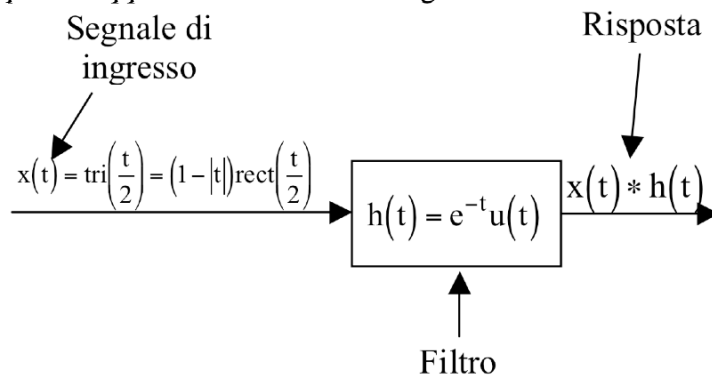
Determinare la risposta nel tempo di un sistema lineare con risposta impulsiva esponenziale $h(t) = e^{-t}u(t)$ al segnale $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{2}\right)$.

Soluzione

Il grafico del segnale $x(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{2}\right)$ e quello della risposta impulsiva sono rispettivamente:



La situazione è quindi rappresentabile come in figura:

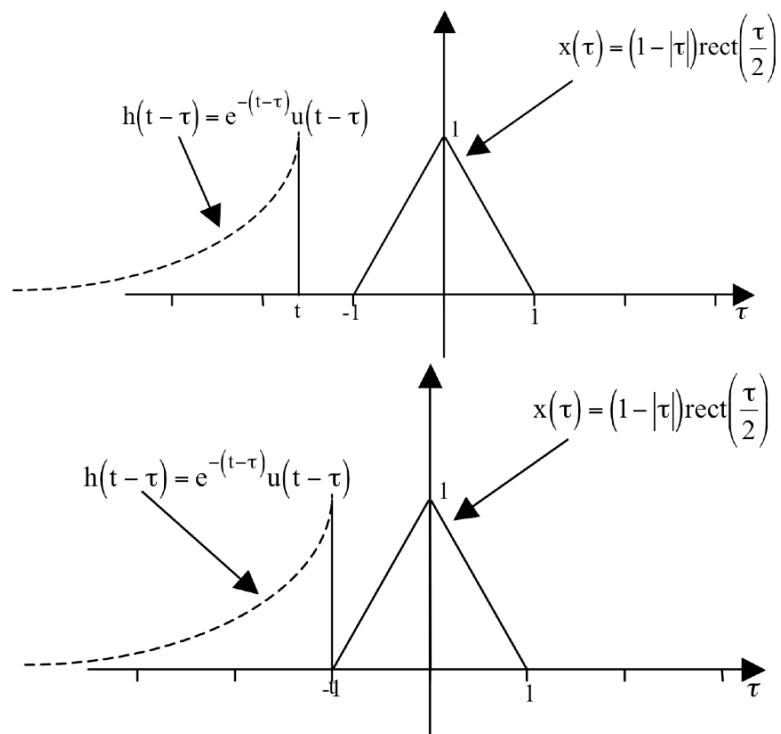


Ricordiamo che $h(t)$ è la risposta impulsiva del filtro e che il prodotto di convoluzione è definito come:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Prendendo come funzione ribaltata, nel prodotto di convoluzione, la risposta del filtro calcoliamo l'integrale individuando 4 zone:

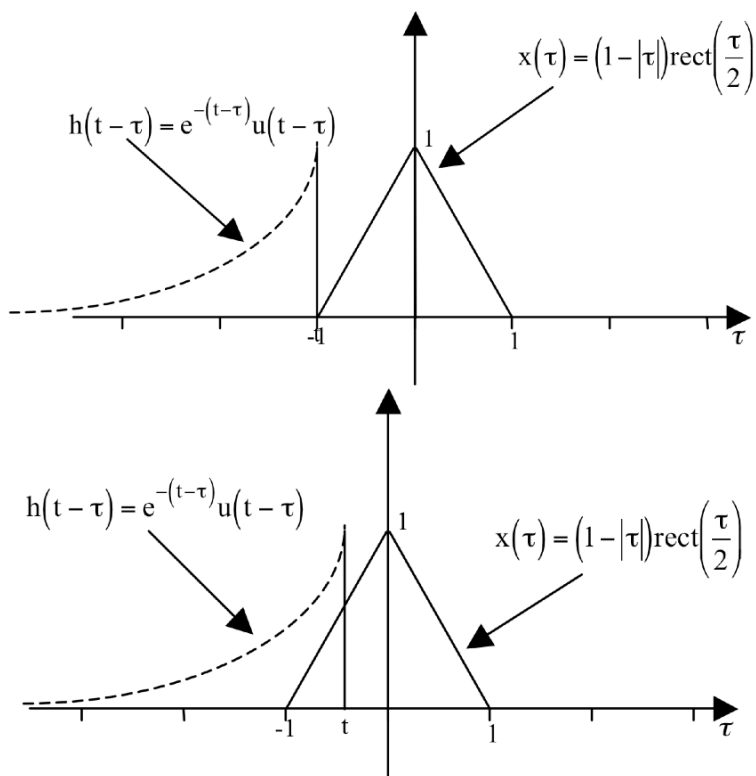
Zona 1: $t < -1$

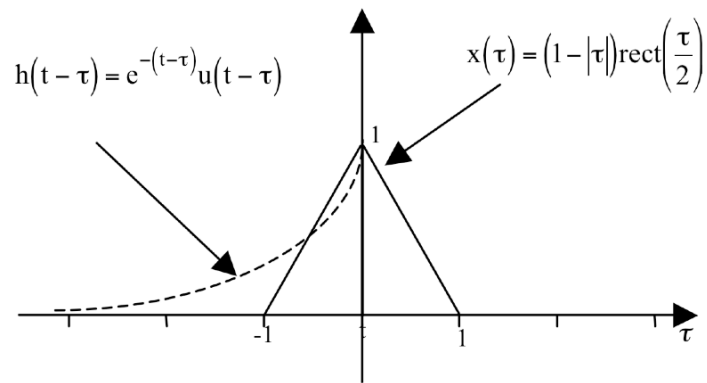


$$y_I(t) = 0$$

Zona 2: $-1 < t < 0$

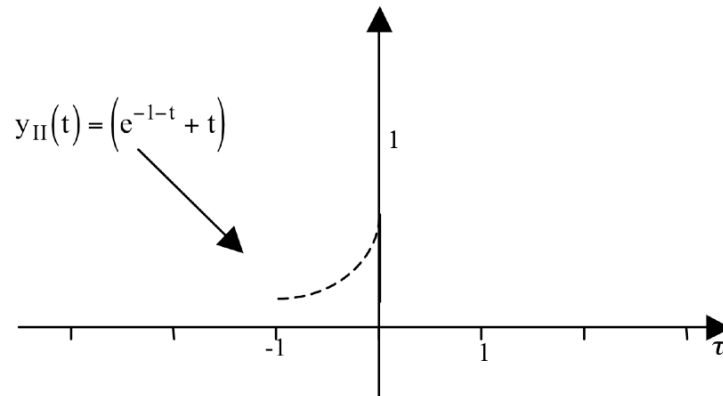
Sovrapponendo i due grafici si ha:





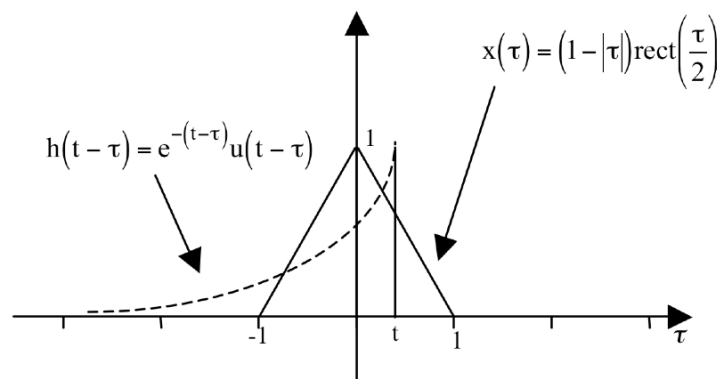
$$y_{II}(t) = \int_{-1}^t \left((1 + \tau)e^{-(t-\tau)} \right) d\tau = e^{-1-t} + t$$

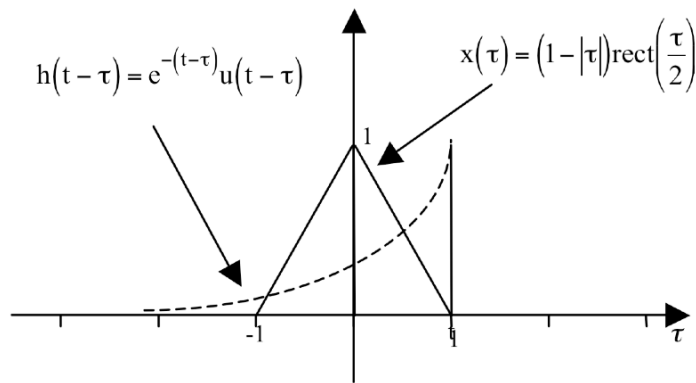
Che è rappresentata dal grafico:



Vediamo che cosa accade per $t > 0$:

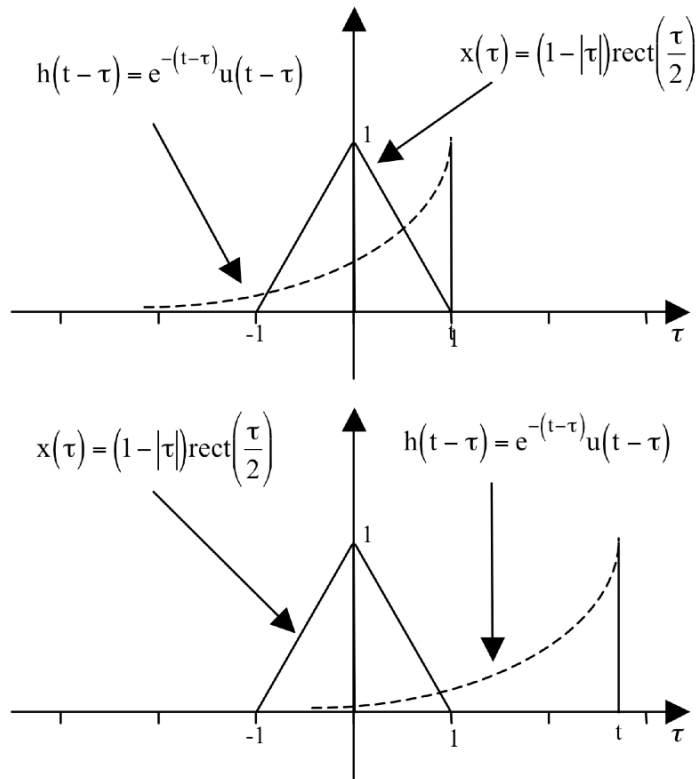
Zona 3: $0 < t < 1$





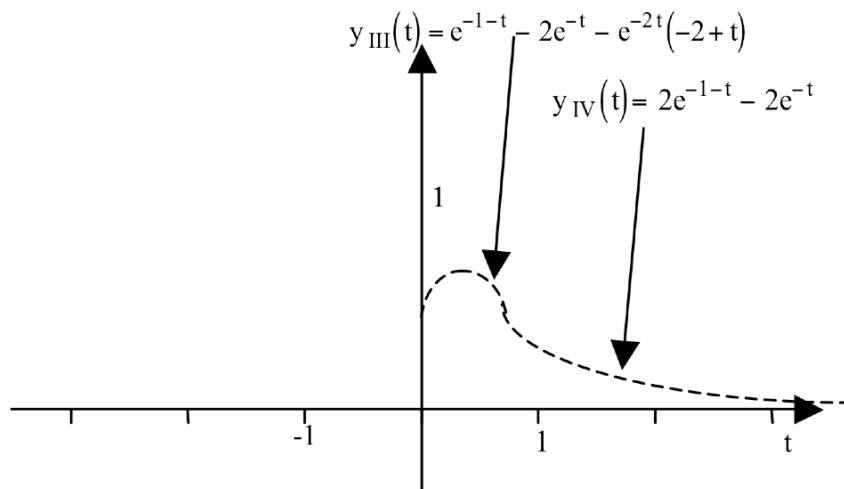
$$y_{III}(t) = \int_{-1}^0 (1 + \tau) e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_0^t (1 - \tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-1-t} - 2e^{-t} - e^{-2t}(-2 + t)$$

Zona IV: $t > 1$



$$y_{IV}(t) = \int_{-1}^0 (1 + \tau) e^{-(t-\tau)} d\tau + \int_0^1 (1 - \tau) e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-1-t} - 2e^{-t} - e^{-t-1}(-2 + 1) = 2e^{-1-t} - 2e^{-t}$$

Che è rappresentata dal grafico:



Mettendo insieme i contributi si ha la risposta del filtro:

$$y(t) = y_{II}(t)\text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) + y_{III}(t)\text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) + y_{IV}(t)u(t-1)$$

Che è tracciata dal seguente grafico:

