

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

Corso di

Segnali e Trasmissione

Betti - Luglio - Leo

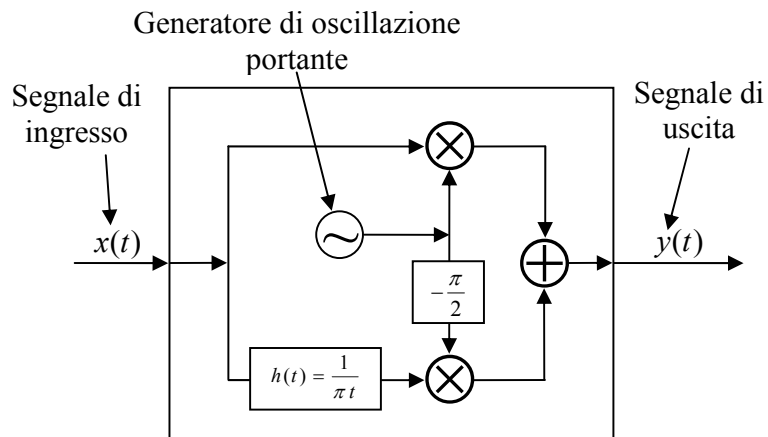
IV Esercitazione 2004

Ver. 1.0

Anno Accademico 2003/04

Esercizio 1

Determinare lo spettro del segnale di uscita, essendo noto lo spettro del segnale in ingresso, del sistema mostrato in figura.

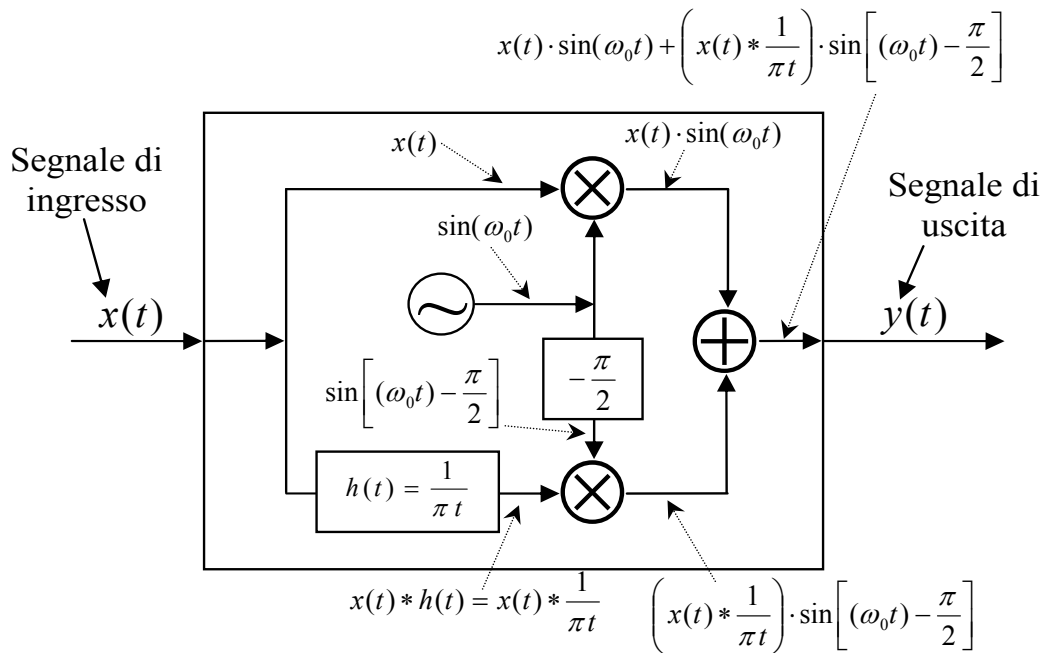


Soluzione

Per risolvere l'esercizio si ricordano le seguenti proprietà:

1. $x(t)$ trasformabile. Esiste: $X(f) = F\{x(t)\}$.
2. Avere un generatore di oscillazione portante equivale a fare il prodotto del segnale per $\sin(\omega_0 t)$.
3. $F\{\sin(\omega_0 t)\} = F\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$
4. $h(t) = \frac{1}{\pi t} \Rightarrow F\{h(t)\} = H(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$

Nella figura seguente si può vedere come il segnale viene elaborato all'interno del sistema.



La risposta del sistema è, quindi, la somma di diversi contributi. Come si può vedere dalla figura, il segnale che transita nella parte superiore del sistema risulta:

- $x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$

Nella parte inferiore del sistema si ha prima il transito del segnale nel filtro $h(t)$:

$$x(t) * h(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

Successivamente si ha il prodotto del prodotto di convoluzione per l'oscillazione sfasata di $-\frac{\pi}{2}$, ossia $\sin \left[(\omega_0 t) - \frac{\pi}{2} \right]$, per cui la risposta nella parte inferiore del sistema risulta:

- $\sin \left[(\omega_0 t) - \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t} \right)$

All'uscita del sommatore si ha la risposta globale del sistema:

$$y(t) = x(t) \cdot \sin(\omega_0 t) + \sin \left[(\omega_0 t) - \frac{\pi}{2} \right] \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t} \right)$$

Ricordando la proprietà della trasformata di Fourier per cui $F\{x(t) * h(t)\} = X(f) \cdot H(f)$ si calcola la trasformata di Fourier della risposta del sistema:

$$\begin{aligned}
F\{y(t)\} &= F\left\{x(t) \cdot \sin(\omega_0 t) + \sin\left[(\omega_0 t) - \frac{\pi}{2}\right] \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)\right\} = \\
&= F\{x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)\} + F\left\{\sin\left[(\omega_0 t) - \frac{\pi}{2}\right] \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)\right\} = \\
&= F\{x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\} + F\left\{\sin\left[(\omega_0 t) - \frac{\pi}{2}\right] \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)\right\} = \\
&= F\{x(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\} + F\left\{[-\cos(2\pi f_0 t)] \cdot \left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)\right\} = \\
&= F\{x(t)\} * F\{\sin(2\pi f_0 t)\} + F\{[-\cos(2\pi f_0 t)]\} * F\left\{\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)\right\} = \\
&= X(f) * \left\{\frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]\right\} + \left\{-\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]\right\} * F\left\{\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)\right\} = \\
&= \left\{\frac{1}{2j}[X(f - f_0) - X(f + f_0)]\right\} + \left\{-\frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]\right\} * \{-j \operatorname{sgn}(f)X(f)\} = \\
&= \frac{1}{2j}[X(f - f_0) - X(f + f_0)] - \frac{1}{2j}[\operatorname{sgn}(f + f_0)X(f + f_0) + \operatorname{sgn}(f - f_0)X(f - f_0)] = \\
&= \frac{1}{2j}\{(X(f + f_0)[-1 - \operatorname{sgn}(f + f_0)]) + (X(f - f_0)[1 - \operatorname{sgn}(f - f_0)])\}
\end{aligned}$$

Considerando che:

$$[1 - \operatorname{sgn}(f - f_0)] = 2u(f_0 - f)$$

$$[-1 - \operatorname{sgn}(f + f_0)] = -2u(f_0 + f)$$

Si ha che:

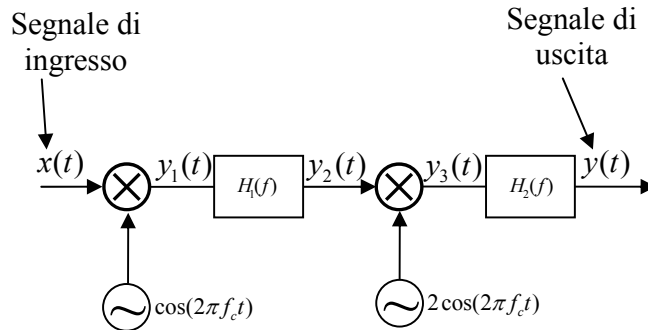
$$\begin{aligned}
F\{y(t)\} &= Y(f) = \frac{1}{2j}\{(X(f + f_0)[-2u(f_0 + f)]) + (X(f - f_0)[2u(f_0 - f)])\} = \\
&= \frac{1}{j}\{-X(f + f_0)u(f_0 + f) + X(f - f_0)u(f_0 - f)\} = j\{X(f + f_0)u(f_0 + f) - X(f - f_0)u(f_0 - f)\}
\end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà della funzione $u(f)$ la trasformata di Fourier può essere espressa come:

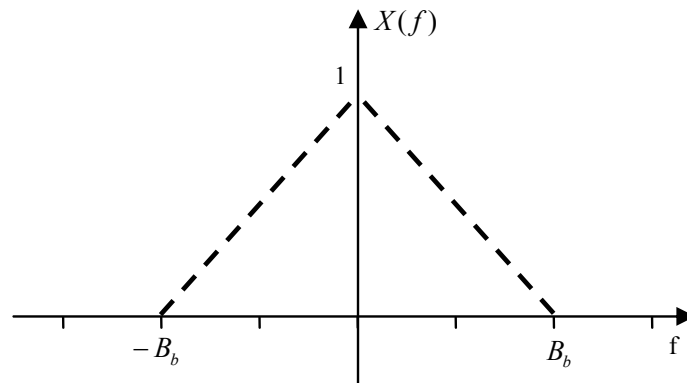
$$Y(f) = \begin{cases} -jX(f - f_0) & \text{per } f < -f_0 \\ j[X(f + f_0) - X(f - f_0)] & \text{per } -f_0 < f < f_0 \\ jX(f + f_0) & \text{per } f_0 < f \end{cases}$$

Esercizio 2

Determinare lo spettro del segnale in uscita dal dispositivo mostrato in figura.

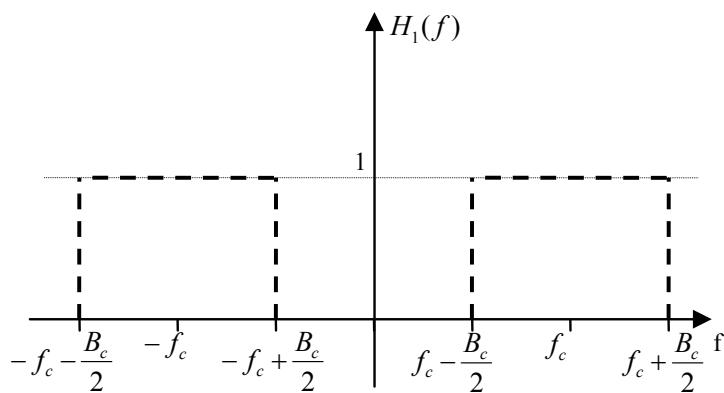


in cui lo spettro del segnale di ingresso è dato da:



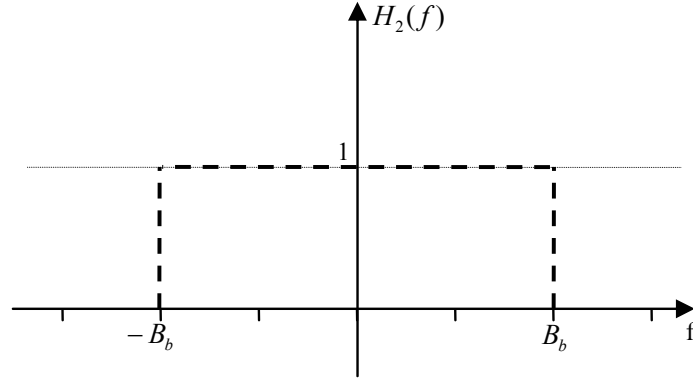
la funzione di trasferimento $H_1(f)$ è:

$$H_1(f) = \begin{cases} 1 & \text{per } f_c - \frac{B_c}{2} < |f| < f_c + \frac{B_c}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



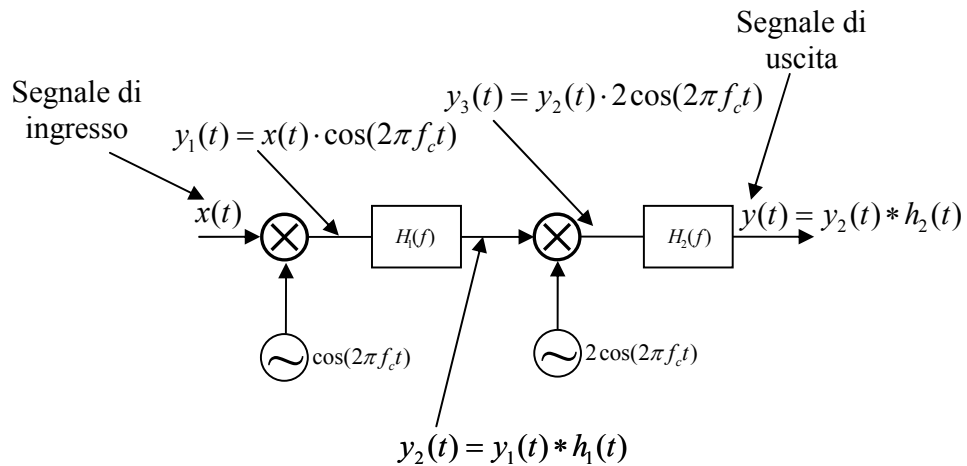
la funzione di trasferimento $H_2(f)$ è:

$$H_2(f) = \begin{cases} 1 & \text{per } |f| \leq B_b \text{ con } B_c \geq 2B_b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Soluzione

Nella figura seguente si può vedere come il segnale viene elaborato all'interno del sistema.



Si consideri che la forma analitica del segnale di ingresso è data dalla espressione:

$$x(t) = \text{tri}\left(\frac{f}{2B_b}\right) = \left(1 - \frac{|f|}{B_b}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2B_b}\right)$$

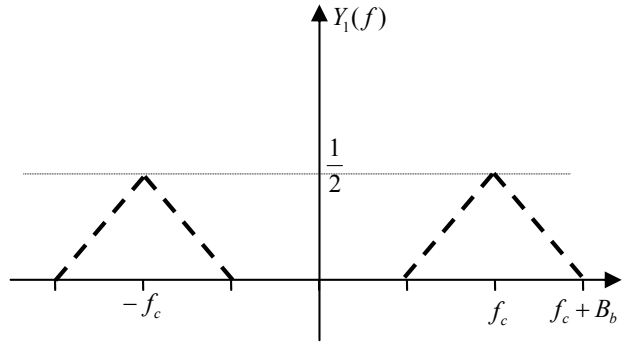
Considerando i termini derivanti da ciascuna operazione:

- $y_1(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$
- $y_2(t) = [x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)] * h_1(t) = y_1(t) * h_1(t)$
- $y_3(t) = \{[x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)] * h_1(t)\} \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = y_2(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t)$
- $y(t) = y_3(t) * h_2(t) = \{[x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)] * h_1(t)\} \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) * h_2(t)$

ricordando l'operazione di modulazione sul segnale $y_1(t)$, risulta:

$$F\{y_1(t)\} = Y_1(f) = F\{x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)\} = \frac{X(f + f_c) + X(f - f_c)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \text{tri} \left(\frac{f + f_c}{2B_b} \right) + \text{tri} \left(\frac{f - f_c}{2B_b} \right) \right\}$$

Graficamente:



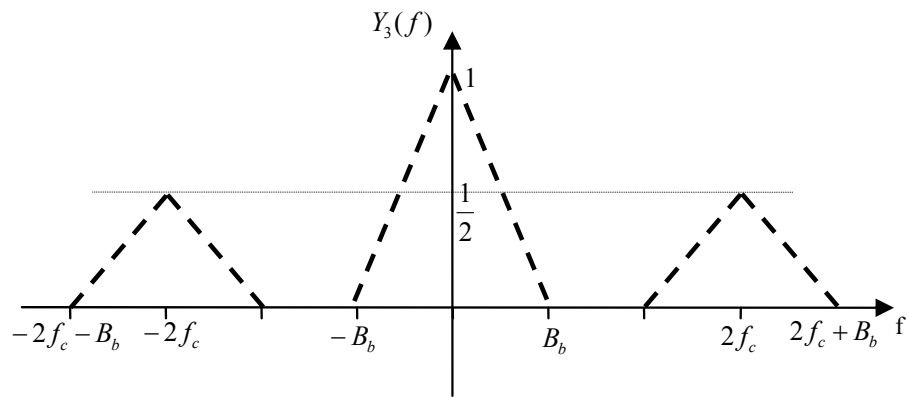
Si ha la relazione $\frac{B_c}{2} \geq B_b$ e da cui si può trarre la seguente considerazione:

$$F\{y_2(t)\} = Y_2(f) = F\{[x(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)] * h_1(t)\} = F\{y_1(t) * h_1(t)\} = Y_1(f) \cdot H_1(f) = Y_1(f)$$

Infine, sempre in base al teorema della modulazione, la trasformata di $y_3(t)$ risulta:

$$\begin{aligned} F\{y_3(t)\} &= Y_3(f) = F\{y_1(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t)\} = 2 \frac{Y_1(f + f_c) + Y_1(f - f_c)}{2} = Y_1(f + f_c) + Y_1(f - f_c) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{tri} \left(\frac{f + 2f_c}{2B_b} \right) + \text{tri} \left(\frac{f}{2B_b} \right) + \text{tri} \left(\frac{f}{2B_b} \right) + \text{tri} \left(\frac{f - 2f_c}{2B_b} \right) \right\} = \\ &= \text{tri} \left(\frac{f}{2B_b} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \text{tri} \left(\frac{f + 2f_c}{2B_b} \right) + \text{tri} \left(\frac{f - 2f_c}{2B_b} \right) \right\} \end{aligned}$$

Graficamente:

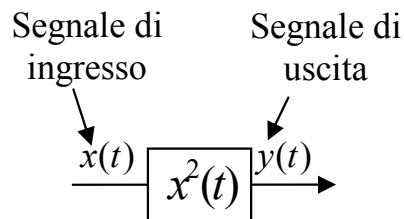
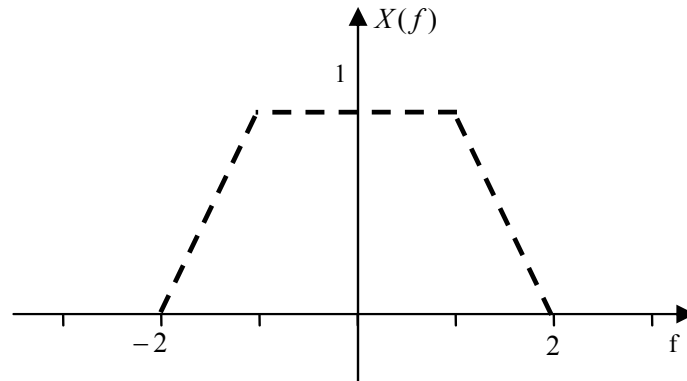


Il segnale in uscita dal sistema risulta quindi:

$$Y(f) = F\{y(t)\} = F\{y_3(t) * h_2(t)\} = Y_3(f) \cdot H_2(f) = \text{tri}\left(\frac{f}{2B_b}\right) = X(f)$$

Esercizio 3

Un segnale $x(t)$, con spettro rappresentato in figura, transita in un quadripolo che effettua l'operazione di elevamento al quadrato.



Si determini la larghezza di banda del segnale in uscita.

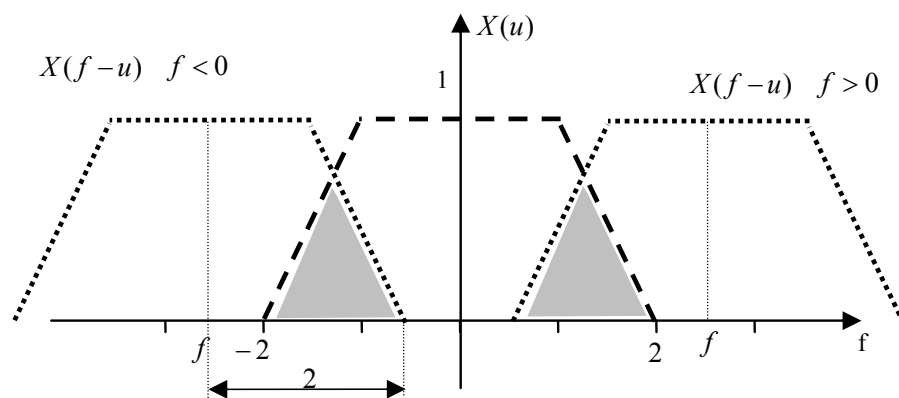
Soluzione

In questo caso non si realizza una trasformazione lineare per cui, non essendo possibile trovare una risposta impulsiva e la relativa trasformata di Fourier, si opera sul segnale di ingresso sul quale si applica la trasformazione.

$$y(t) = [x(t)]^2$$

$$F\{y(t)\} = F\{x^2(t)\} = F\{x(t)\} * F\{x(t)\} = X(f) * X(f) = \int X(u)X(f-u)du$$

Il problema richiede di calcolare solo la larghezza di banda all'uscita del filtro per cui non è necessario eseguire la convoluzione. Dalla figura risulta:



Dalla figura risulta quindi che:

$$\begin{cases} Y(f) = 0 & \text{per } |f| > 4 \\ Y(f) \neq 0 & \text{per } |f| < 4 \end{cases}$$

Per cui se B_x è la larghezza di banda del segnale dato $x(t)$ la larghezza di banda B_y del segnale $y(t)$, all'uscita del filtro, risulta: $B_y = 2B_x$