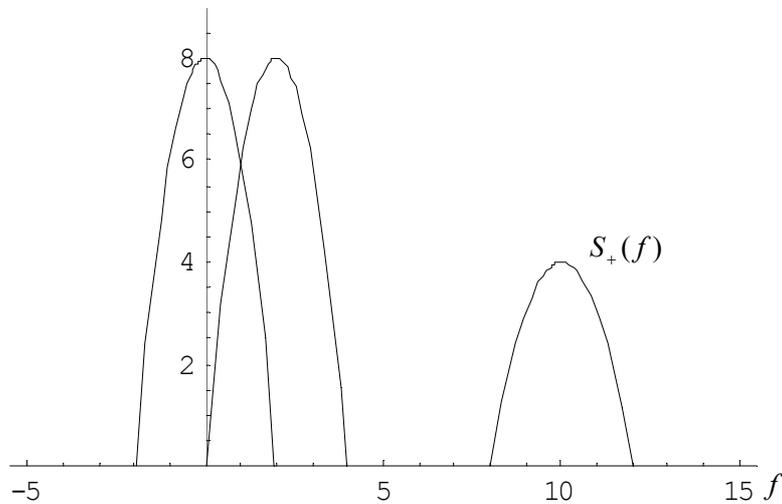


## Esercitazione V

Calcolare il segnale analitico  $a(t)$  ed inviluppo complesso  $i(t)$  rispetto ad una data frequenza  $f_c$  a partire dallo spettro  $S_+(f)$  mostrato in figura.

$$S_+(f) = 4 - (f - 10)^2 \left[ \text{rect}\left(\frac{f - 10}{4}\right) \right]$$

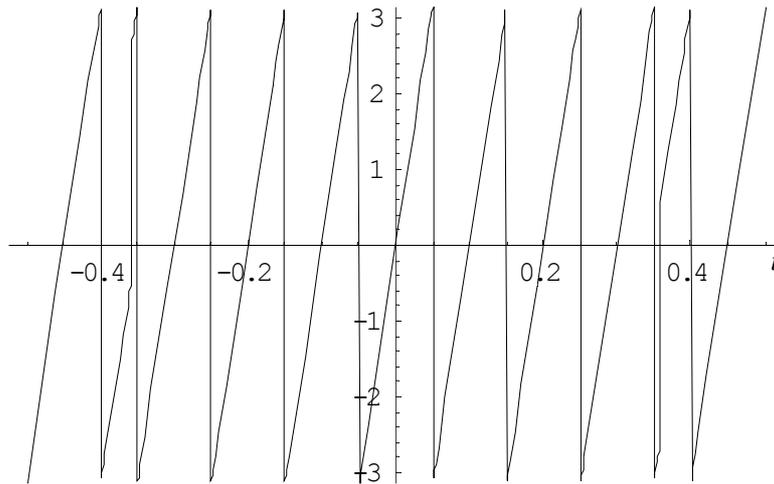
$$A(f) = 2S_+(f) = 2\left(4 - (f - 10)^2\right) \left[ \text{rect}\left(\frac{f - 10}{4}\right) \right]$$



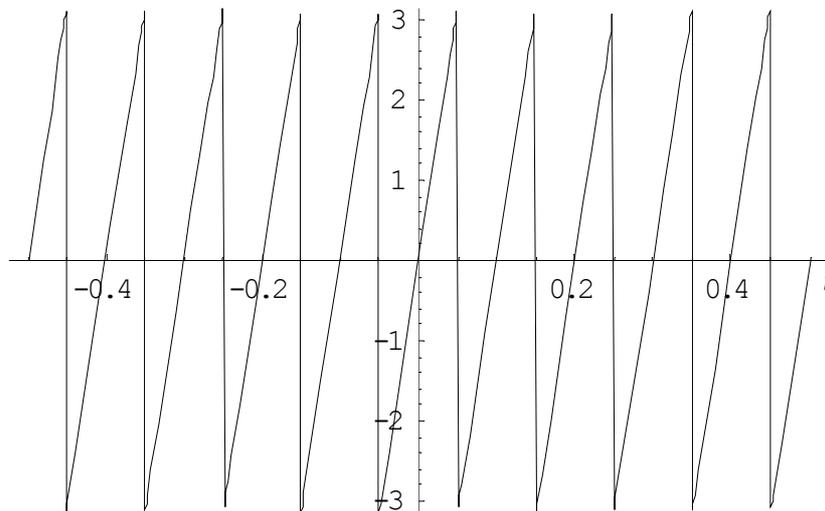
Il segnale analitico  $a(t)$  è ottenuto mediante antitrasformazione, in base alla seguente

$$a(t) = F^{-1}\{A(f)\} = 2 \int_8^{12} \left(4 - (f - 10)^2\right) e^{j2\pi ft} df = \frac{e^{j20\pi t} [-4\pi t \cos(4\pi t) + \sin(4\pi t)]}{\pi^3 t^3}$$

Nella figura successiva è mostrato l'andamento della funzione  $\text{Arg}[a(t)]$  e sono evidenti l'andamento periodico dovuto alla portante  $c(t) = e^{j20\pi t}$  come pure gli "scatti" di fase dovuti alle funzioni  $\cos(4\pi t)$  e  $\sin(4\pi t)$ .

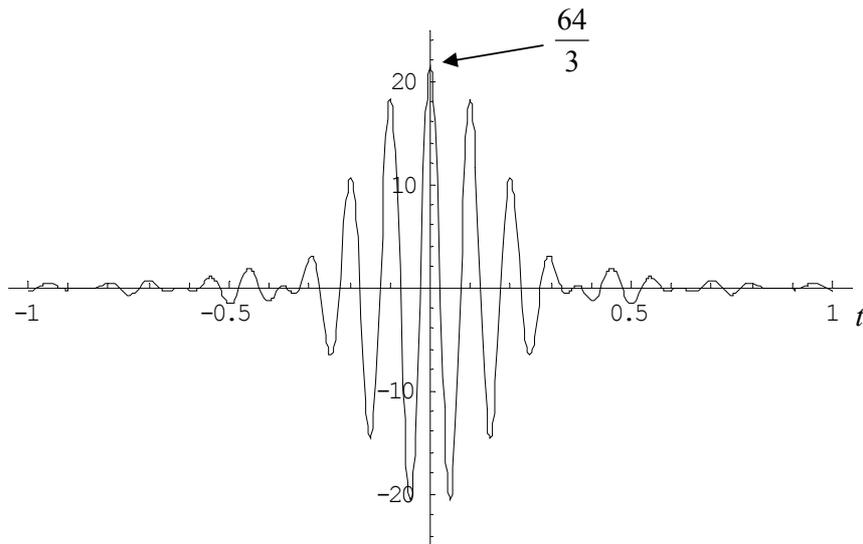


Infatti, per confronto, nella figura successiva è mostrato l'andamento della  $\text{Arg}[e^{j20\pi}]$ , relativa alla fase della sola "portante".



Nella figura successiva è mostrato invece il segnale parte reale di  $a(t)$  dato dall'espressione

$$\text{Re}\{a(t)\} = \frac{\cos(20\pi)[-4\pi t \cos(4\pi) + \sin(4\pi)]}{\pi^3 t^3}$$

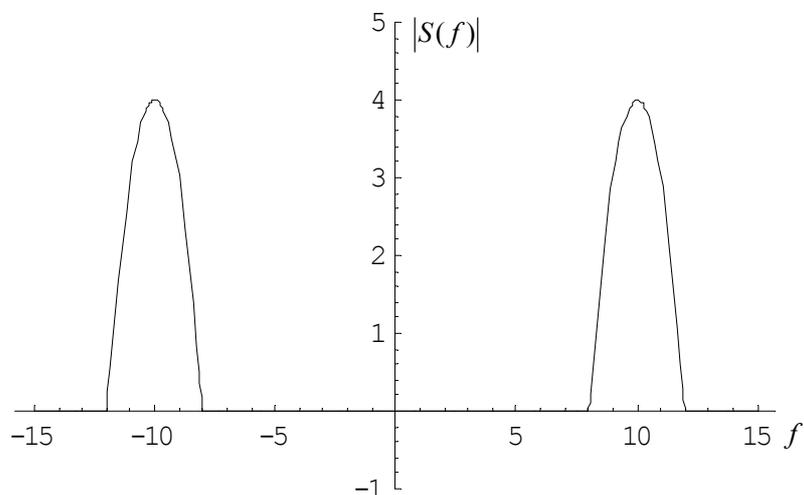


E' ovvio l'andamento oscillatorio smorzato e si è evidenziato il valore limite del segnale per

$$t \rightarrow 0, \text{ dato da } \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{a(t)\} = \frac{64}{3} \cong 21,34$$

La trasformata di Fourier della parte reale di  $a(t)$  fornirà, come noto, lo spettro del segnale originario, dato da

$$S(f) = F(\operatorname{Re}\{a(t)\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(20\pi t)[-4\pi t \cos(4\pi t) + \sin(4\pi t)]}{\pi^3 t^3} e^{-j2\pi ft} dt$$



il cui modulo è mostrato nella figura precedente.

L'involuppo complesso del segnale è calcolato per due valori della frequenza  $f_c$ : nel primo caso si ottiene uno spettro in banda base simmetrico mentre nel secondo esso è asimmetrico.

Traslazione relativamente ad  $f_c = 10$  (spettro simmetrico).

L'andamento dell'involuppo complesso nel dominio del tempo è dato da

$$i(t) = 2 \int_{-2}^{+2} [4 - f^2] e^{j2\pi ft} df = \frac{-4\pi \cos(4\pi t) + \sin(4\pi t)}{\pi^3 t^3}$$

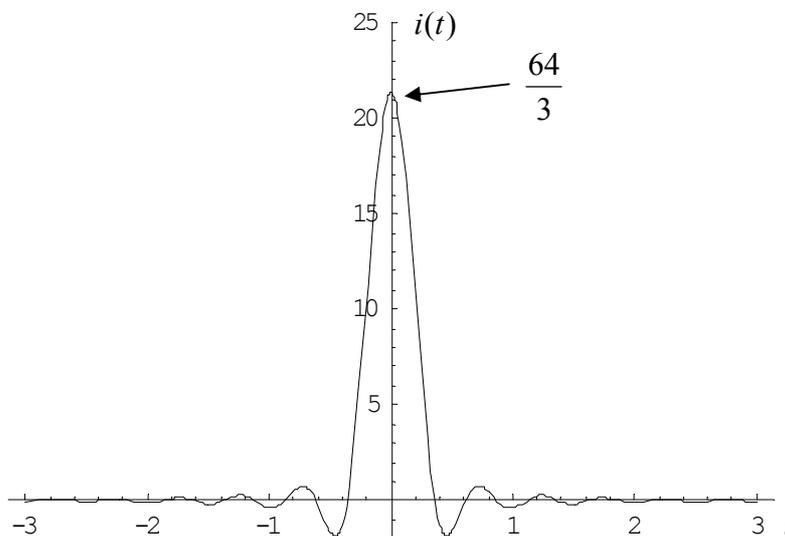
ovvero  $i(t)$  risulta in questo caso essere un segnale reale a causa della simmetria del suo spettro.

Lo sviluppo di  $i(t)$  in serie polinomiale intorno a  $t_0 = 0$  fornisce

$$i(t) \approx \frac{64}{3} - \frac{512\pi^2 t^2}{15} + \frac{2048\pi^4 t^4}{105} + O[t^6]$$

da cui si evince l'ovvia conseguenza che per  $t = 0$   $i(t)$  assume il valore di  $\frac{64}{3}$ .

L'andamento di  $i(t)$  è mostrato nella figura seguente.



Traslazione relativamente ad  $f_c = 8$  (spettro asimmetrico).

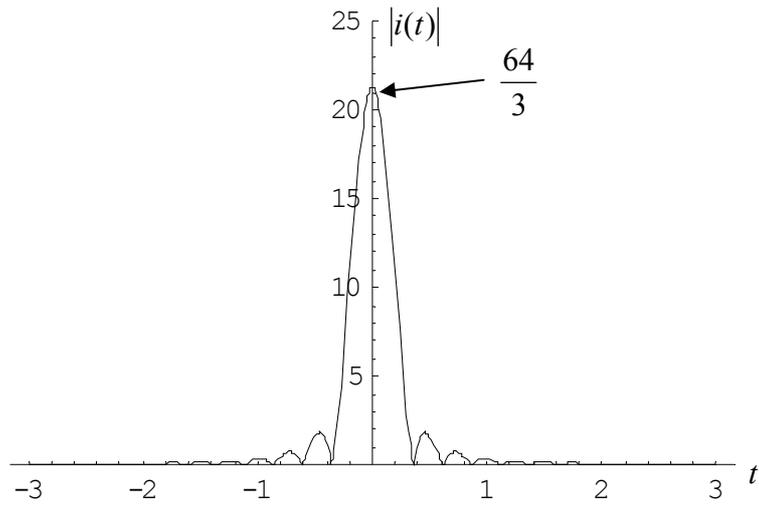
In questo secondo caso l'andamento di  $i(t)$  è dato dall'espressione

$$i(t) = 20 \int_{-2}^4 [4 - (f - 2)^2] e^{j2\pi ft} dt = 2 \left[ \frac{e^{j8\pi t} (-j - 4\pi t)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j + 4\pi t}{4\pi^3 t^3} \right]$$

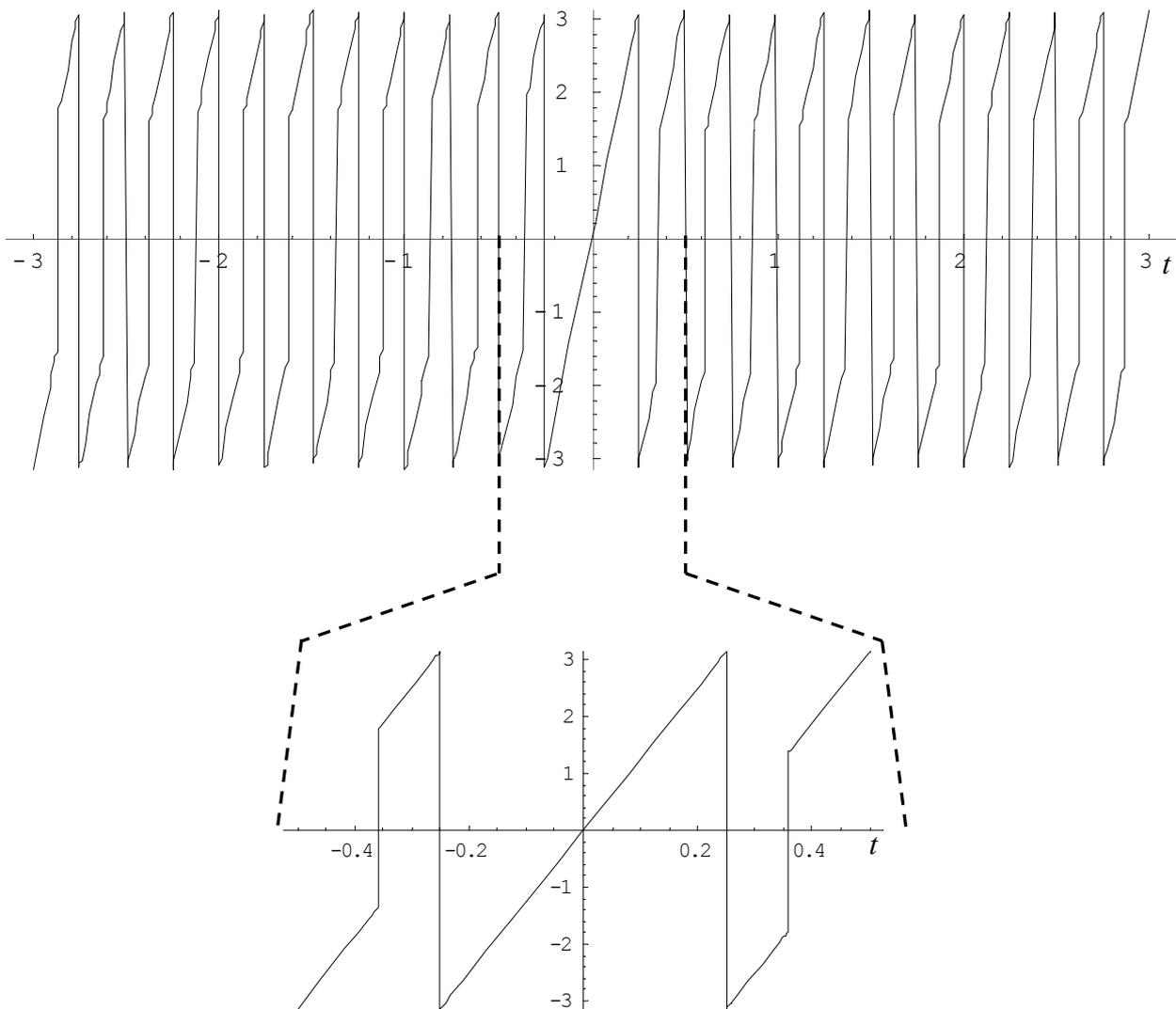
che risulta essere un segnale complesso a causa dell'asimmetria dello spettro in banda-base.

L'andamento del suo modulo è mostrato in figura e, come ovvio, il suo valore per  $t = 0$

risulta uguale a  $\frac{64}{3}$ .



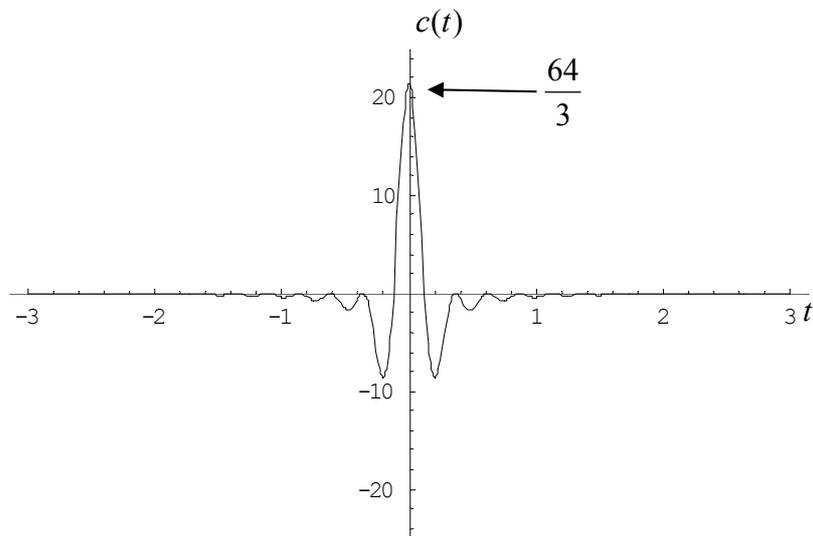
L'andamento della fase  $Arg[i(t)]$  è mostrato nella figura successiva in cui si è evidenziata una porzione del segnale intorno all'origine per metterne in evidenza l'andamento dispari della fase.



La componente in fase  $c(t)$  di  $i(t)$  è ottenuta calcolandone la parte reale, data da

$$c(t) = \operatorname{Re}\{i(t)\} = \left| 2 \left[ \frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi}{4\pi^3 t^3} \right] \right| \cos \left\{ \operatorname{Arg} \left[ \frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi}{4\pi^3 t^3} \right] \right\}$$

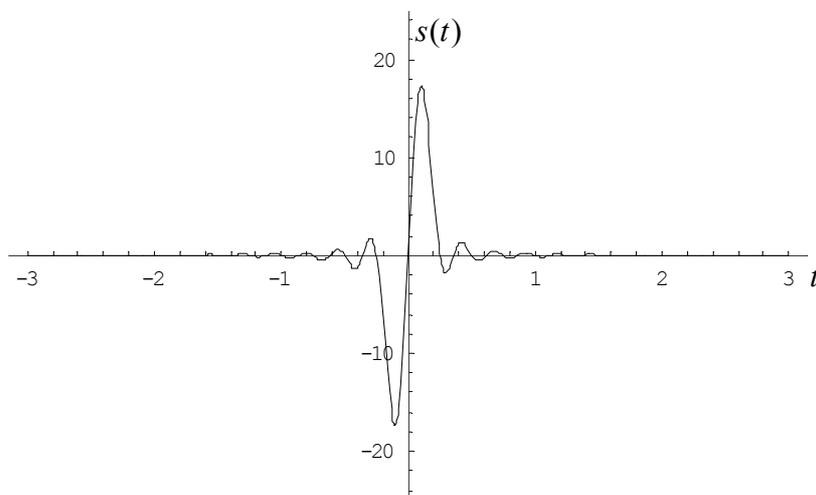
il cui andamento è mostrato nella figura seguente.  $c(t)$  risulta essere una funzione pari ed il suo valore per  $t = 0$  è ovviamente pari a  $\frac{64}{3}$ .



La componente in quadratura  $s(t)$  di  $i(t)$  risulta espressa dalla relazione

$$s(t) = \left| 2 \left[ \frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi}{4\pi^3 t^3} \right] \right| \sin \left\{ \operatorname{Arg} \left[ \frac{e^{j8\pi}(-j-4\pi)}{4\pi^3 t^3} - \frac{-j+4\pi}{4\pi^3 t^3} \right] \right\}$$

ed il suo andamento, di tipo dispari, è mostrato nella figura successiva



I due andamenti mostrati separatamente possono essere rappresentati in maniera sintetica nel piano  $\text{Re}\{i(t)\}-\text{Im}\{i(t)\}$  così da ottenere la figura successiva in cui è messo in evidenza l'istante  $t = 0$ . Ovviamente, in ogni istante il vettore che congiunge l'origine degli assi con il punto della curva rappresentativa fornisce modulo e fase dell'involuppo complesso. Si ricorda altresì che nel caso di una portante pura, di ampiezza  $A$ , la corrispondente curva rappresentativa su tale piano è data da una circonferenza di raggio  $A$ .

