Esercizi – Mezzi trasmissivi

1) In un radiocollegamento a 7 GHz, la distanza di tratta D è 50 km e la potenza in trasmissione P_T è 0.5 W; se si vuole che, in condizioni di visibilità, la potenza ricevuta P_R sia 0.2 µW, determinare il guadagno delle due antenne, uguali in Trasmissione e Ricezione.

Dalla relazione generale

$$P_R = \frac{P_T\, G_T G_R c^2}{(4\pi\, f\, D)^2} = \frac{P_T\, G^2\, c^2}{(4\pi\, f\, D)^2} \Rightarrow G = \sqrt{\frac{P_R}{P_T}}\,\frac{4\pi\, f\, D}{c} = \sqrt{\frac{0.2\,10^{-6}}{0.5}}\,\frac{4\pi 7\,10^{9}\,50\,10^{3}}{3\,10^{8}}$$

da cui G = 9272 (39.7 dB).

2) Un cavo a coppie simmetriche ha le seguenti costanti primarie
R = 100 Ω/km C = 5 10^{-8} F/km L = 10^{-3} H/km

Determinare l'impedenza caratteristica a 100 kHz e il coefficiente di riflessione rispetto a 120 Ω.
La relazione che fornisce l'impedenza caratteristica è

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j2\pi\, f\, L}{j2\pi C}} = \sqrt{\frac{100 + j2\pi 100\,10^{3}\,10^{-3}}{j2\pi 100\,10^{3}\,5\,10^{-8}}} = \sqrt{\frac{j628+100}{j0.0314}} = \frac{25.2\,e^{j0.7}}{0.177\,e^{j0.}}$$

$$142.3\, e^{-j0.079} = 141.8 - j11.23$$

Il coefficiente di riflessione vale

$$\rho = \frac{Z_0 - R}{Z_0 + R} = \frac{141.8 - j11.23 - 120}{141.8 - j11.23 + 120} = \frac{21.8 - j11.23}{261.8 - j11.23} = \frac{24.5\, e^{-j0.475}}{262\, e^{-j0.043}}$$

$$= 0.0935\, e^{-j0.432}$$

Esercizi – Trasformata di Fourier

3) Si determini la trasformata di Fourier di

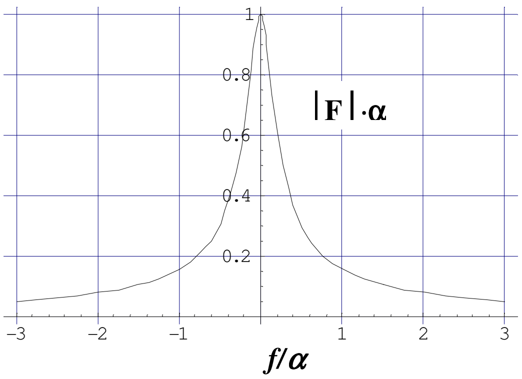
$$x(t)=e^{-\alpha t}\,u(t),\quad \alpha>0$$

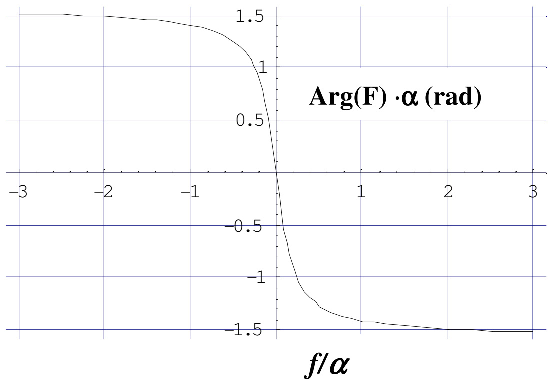
che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet.

$$F[e^{-\alpha t}u(t),\,\alpha>0]=\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\,e^{-j2\pi f t}dt=\int_0^{\infty}e^{-(\alpha t+j2\pi f t)}\,dt=\left.\frac{e^{-(\alpha t+j2\pi f t)}}{-(\alpha+j2\pi f)}\right|_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)}\quad \forall f\quad \Rightarrow per\,la\ dualità\ F[\frac{1}{(\alpha+j2\pi t)}]=e^{\alpha f}u(-f),\,\alpha>0$$

Con spettro





Si può procedere nel tempo in altro modo, poiché

$$\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}u(t)=\delta(t)+\alpha\ e^{-\alpha t}u(t),\ quindi$$

$$j2\pi f\,\Im[x(t)]=1+\alpha\Im[x(t)]\ da\ cui$$

$$\Im[x(t)]=\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$$

4) Si determini la trasformata di Fourier di

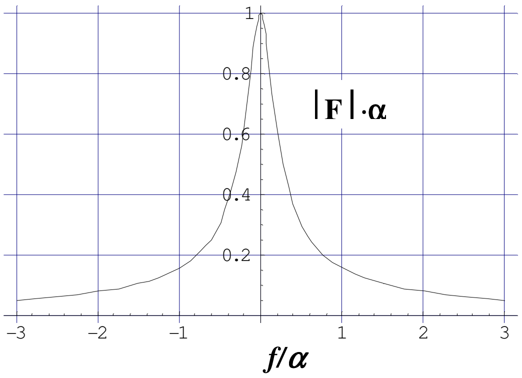
$$x(t)=e^{\alpha t}\,u(-t),\quad \alpha>0$$

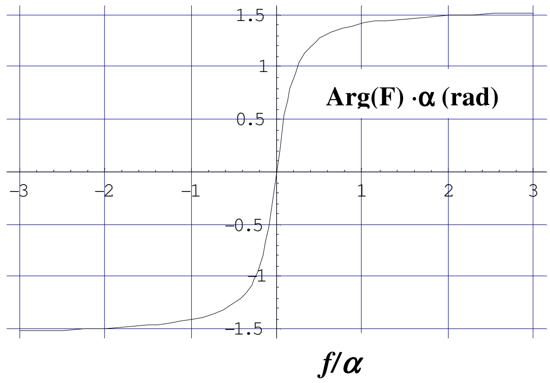
Che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet.

$$F[e^{\alpha t}\,u(-t),\quad \alpha>0]=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}\,e^{-j2\pi f t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha t-j2\pi f t)}\,dt=\left.\frac{e^{(\alpha t-j2\pi f t)}}{(\alpha-j2\pi f)}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{(\alpha-j2\pi f)}\ \forall f\quad \Rightarrow per\,la\ dualità\ F[\frac{1}{(\alpha-j2\pi t)}]=e^{-\alpha f}u(f),\,\alpha>0$$

Con spettro





5) Si determini la trasformata di Fourier di

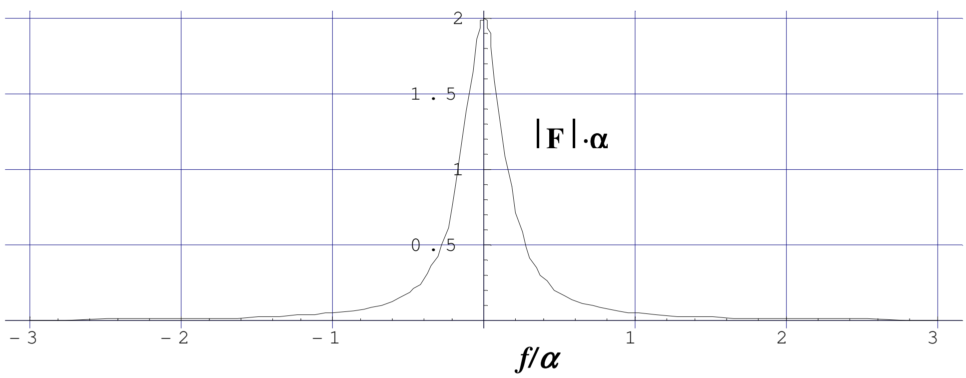
$$x(t)=e^{-\alpha|t|},\ \forall t,\ \alpha>0$$

Che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet. Componendo le relazioni già trovate

$$F[e^{-\alpha|t|},\forall t]=\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)}+\frac{1}{(\alpha-j2\pi f)}=\frac{2\alpha}{(\alpha^2+4\pi^2 f^2)}\ \forall f$$

$$\Rightarrow per\ la\ \ dualità\ F[\frac{2\alpha}{(\alpha^2+4\pi^2 t^2)}\ \forall t)]=e^{-\alpha|f|},\forall f$$

Con spettro



6) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=t\cdot e^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0$$

Che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet. Si può procedere in due modi

$$F[t\cdot e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha>0]=\int_0^\infty t\cdot e^{-\alpha t}\,e^{-j2\pi f t}dt=\left.\frac{t\cdot e^{-(\alpha t+j2\pi f t)}}{-(\alpha+j2\pi f)}\right|_0^\infty-\int_0^\infty\frac{e^{-(\alpha t+j2\pi f t)}}{-(\alpha+j2\pi f)}dt$$

$$=0+\int_0^\infty\frac{e^{-(\alpha t+j2\pi f t)}}{(\alpha+j2\pi f)}dt=\left.\frac{e^{-(\alpha t+j2\pi f t)}}{-(\alpha+j2\pi f)^2}\right|_0^\infty=\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}\quad\forall f$$

$$\Rightarrow \textit{per la dualità } F[\frac{1}{(\alpha+j2\pi t)^2}\quad\forall f]=-f\cdot e^{\alpha f}u(-f),\ \alpha>0$$

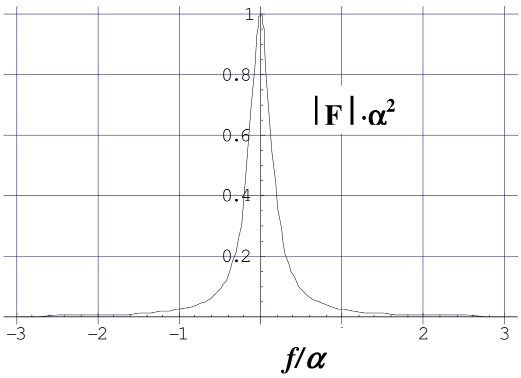
Oppure, per la proprietà

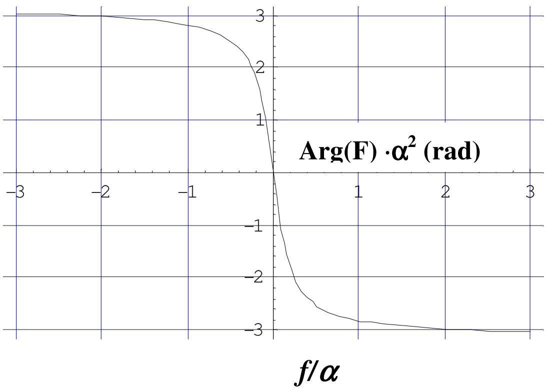
$$F[t\cdot x(t)]=\frac{1}{-j2\pi}\frac{dF[x(t)]}{df}$$

$$F\left[t\cdot e^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0\right]=\frac{1}{-j2\pi}\frac{dF\left[e^{-\alpha t}u(t),\quad \alpha>0\right]}{df}=\frac{1}{-j2\pi}\frac{d}{df}\left[\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)}\right]\quad\forall f$$

$$=\frac{1}{-j2\pi}\frac{-j2\pi}{(\alpha+j2\pi f)^2}=\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}\ \forall f$$

Con spettro





Si può anche procedere come segue

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}t\cdot e^{-\alpha t}u(t)\ =\ e^{-\alpha t}u(t)\ -\alpha\, t\cdot e^{-\alpha t}u(t)=\ e^{-\alpha t}u(t)\ -\alpha\, x(t),\ \textit{quindi}$$

$$j\,2\,\pi\,f\ \Im[x(t)]\ =\ \frac{1}{\alpha\ +\ j\,2\,\pi\,f}-\alpha\,\Im[x(t)],\ \textit{da cui}$$

$$\Im[x(t)]\ =\ \frac{1}{(\alpha\ +\ j\,2\,\pi\,f)^2}$$

4.1) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=t\cdot e^{\alpha t}\,u(-t),\quad \alpha>0$$

Che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet. Operando nel tempo

$$F[t\cdot e^{\alpha t}u(-t),\ \alpha>0]=\int_{-\infty}^{0} t\cdot e^{-\alpha t}\, e^{-j2\pi f t}dt=\left.\frac{t\cdot e^{(\alpha t-j2\pi f t)}}{(\alpha-j2\pi f)}\right|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{(\alpha t-j2\pi f t)}}{(\alpha-j2\pi f)}dt$$

$$=0-\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{(\alpha t-j2\pi f t)}}{(\alpha-j2\pi f)}dt=\left.\frac{e^{(\alpha t-j2\pi f t)}}{-(\alpha-j2\pi f)^2}\right|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{(\alpha-j2\pi f)^2}\quad\forall f$$

$$\Rightarrow per\, la\ dualità\ \ F[-\frac{1}{(\alpha-j2\pi t)^2}\quad\forall t]=-f\cdot e^{-\alpha f}u(f),\ \alpha>0$$

E per i risultati precedenti

$$F[-t\cdot e^{\alpha t}u(-t)+t\cdot e^{-\alpha t}u(t)=|t|\cdot e^{\alpha|t|},\ \alpha>0]=\frac{1}{(\alpha-j2\pi f)^2}+\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^2}=\frac{2\left(\alpha^2-4\pi^2 f^2\right)}{(\alpha^2+4\pi^2 f^2)^2}\forall f$$

7) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=1/t,\quad t\neq 0$$

A tal riguardo, si rammenta che

$$F[sign(t)]=\frac{1}{j\,\pi f}\ \forall f\qquad\Rightarrow\qquad F[j\ \pi\, sign(t)]=\frac{1}{f}$$

$$per\ dualità\quad F\left[\frac{1}{t}\right]=j\ \pi\, sign(-f)=-j\ \pi\, sign(f)$$

8) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=\frac{1}{t-t_0},\quad \forall t\neq t_0$$

Poiché si è trovato che

$$F\left[\frac{1}{t}\right]=-j\ \pi\, sign(f)$$

$$allora\,(traslazione\ temporale)\quad F\left[\frac{1}{t-t_0}\right]=-j\ \pi\, sign(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

9) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=\frac{1}{t^2+5t+6}, \quad t\neq -2,-3$$

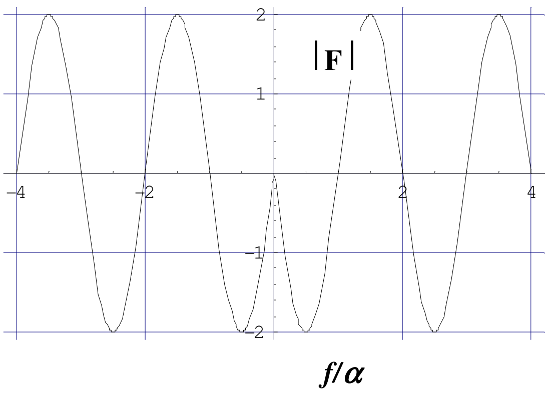
Poiché si è trovato che

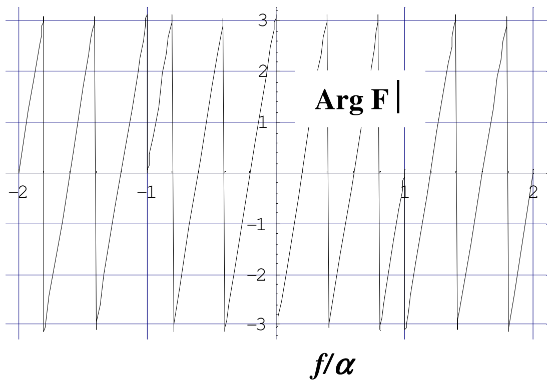
$$F\left[\frac{1}{t-t_0}\right]= -j\,\pi\,sign(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0}\ \ allora,\ siccome\ \ \frac{1}{t^2+5t+6}=\frac{1}{(t+2)(t+3)}=\frac{1}{(t+2)}-\frac{1}{(t+3)}$$

$$F\left[\frac{1}{t^2+5t+6}\right]=-j\,\pi\,sign(f)\cdot\left(e^{j2\pi f2}-e^{j2\pi f3}\right)=-j\,\pi\,sign(f)\cdot e^{j5\pi f}\left(e^{-j\pi f}-e^{j\pi f}\right)=$$

$$j\,\pi\,sign(f)\cdot e^{j5\pi f}\left(e^{j\pi f}-e^{-j\pi f}\right)=2\pi\,sign(f)\cdot Sin(\pi f)\cdot e^{j5\pi f}$$

Con spettro





10) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=\frac{1}{t^4+13t^2+36}, \quad \forall t$$

Che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet. Si utilizzano risultati già trovati

$$poiché \quad \frac{1}{t^4+13t^2+36}=\frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}=\frac{0.2}{(t^2+4)}-\frac{0.2}{(t^2+9)}$$

$$\frac{0.2}{(t^2+4)}=\frac{2(4\pi)(0.1\pi)}{\left(4\pi^2t^2+(4\pi)^2\right)}\Rightarrow F\left[\frac{2(4\pi)(0.1\pi)}{\left(4\pi^2t^2+(4\pi)^2\right)}\right]=(0.1\pi)e^{-4\pi|f|},\forall f$$

$$\frac{0.2}{(t^2+9)}=\frac{2(6\pi)(0.2/3\cdot\pi)}{\left(4\pi^2t^2+(6\pi)^2\right)}\Rightarrow F\left[\frac{2(6\pi)(0.2/3\cdot\pi)}{\left(4\pi^2t^2+(6\pi)^2\right)}\right]=\frac{2}{3\pi}e^{-6\pi|f|},\forall f$$

$$\Rightarrow (0.1\pi)e^{-4\pi|f|}-\frac{2}{3\pi}e^{-6\pi|f|},\forall f$$

9) Si determini la trasformata di Fourier del segnale x(t) che soddisfa la seguente equazione

$\frac{dx(t)}{dt}=-2\beta t\,x(t),\ \ \forall t$, con la condizione $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt=A$

Indicata con X(f) la trasformata (se esiste) con le proprietà della trasformata di Fourier si ha

$$j2\pi f\,X(f)=-2\beta\frac{1}{-j2\pi}\frac{d\,X(f)}{df},\ da\ cui$$

$$-\frac{2\pi^2 f}{\beta}X(f)=\frac{d\,X(f)}{df},\ ovvero$$

$$-\frac{2\pi^2 f}{\beta}df=\frac{d\,X(f)}{X(f)},\ da\ cui\ \mathrm{int}egrando$$

$$-\frac{\pi^2 f^2}{\beta}+C=\ln[X(f)],\ ovvero$$

$$X(f)=e^C\,e^{\frac{-\pi^2}{\beta}f^2},\ e\ \ poichè\, la\, condizione\ \ sull'\mathrm{int}egrale\ equivale\ a\ X(0)=A$$

$$X(f)=A\,e^{\frac{-\pi^2}{\beta}f^2}$$

quanto a x(t), si ha

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\beta t\, x(t), \quad \forall t, \textit{ da cui}$$

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -2\beta t\, dt, \textit{ da cui integrando}$$

$$\ln[x(t)] = -\beta t^2 + C, \textit{ ovvero}$$

$$x(t) = e^C e^{-\beta t^2}, \textit{ inoltre } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$$

$$x(t) = \frac{A\sqrt{\beta}}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta t^2}$$

10) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t) = \frac{1}{t^2 - 4t + 8} \quad \forall t$$

che soddisfa evidentemente le condizioni di Dirichlet.

$$\frac{1}{t^2 - 4t + 8} = \frac{1}{4 + (t-2)^2} \textit{ quindi basta determinare la trasformata di } \frac{1}{4 + (t)^2} \textit{ e poi traslare}$$

$$\textit{poiché } \frac{2\alpha A}{(\alpha^2 + 4\pi^2 t^2)} \forall t = A e^{-\alpha |f|}, \forall f, \textit{ essendo } \frac{1}{4 + (t)^2} = \frac{4\pi^2}{(4\pi)^2 + (t)^2}, \textit{ allora } \alpha = 4\pi,\ A = 2\pi$$

$$F\left[\frac{1}{t^2 - 4t + 8}\right] = 2\pi e^{-4\pi |f|} e^{-j4\pi f}$$

11) Si determini la antitrasformata di Fourier di

$$\frac{\cos^2 4\pi f}{f^2 + 9}, \quad \forall f$$

si ha

$$\frac{\cos^2 4\pi f}{f^2 + 9} = \frac{e^{j8\pi f} + 2 + e^{-j8\pi f}}{4(f^2 + 9)}, \quad \forall f$$

quindi si deve considerare l’antitrasformata solo di $\frac{1}{4(f^2+9)}, \quad \forall f$ di cui si considerano anche le repliche per (t ± 4). Quindi

$$\frac{1}{4\left(f^2+9\right)}=\frac{\pi^2}{\left(4\pi^2 f^2+36\pi^2\right)}\ \forall f,\ da\ cui$$

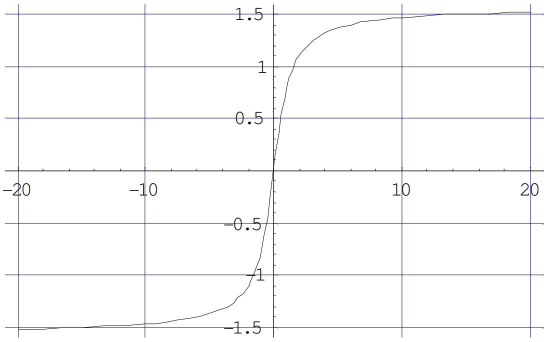
$$F^{-1}\left[\frac{\pi^2}{\left(4\pi^2 f^2+36\pi^2\right)}\right]=\frac{\pi}{12}e^{-6\pi|t|},\forall t,\ quindi\ in\ totale$$

$$\frac{\pi}{12}e^{-6\pi|t-4|}+\frac{\pi}{6}e^{-6\pi|t|}+\frac{\pi}{12}e^{-6\pi|t+4|}$$

12) Si determini la trasformata di Fourier di

$$x(t)=\arg\tan\,(t),\ \forall t$$

Graficato in figura



Strettamente parlando non valgono le condizioni di Dirichet, ma siccome esiste la trasformata di sign(t) non sembrano esservi particolari problemi.

$$Poich\acute{e}\ \frac{d}{dt}\arg\tan\,(t)=\frac{1}{1+t^2},\ per\ precedenti\ risultati$$

$$j2\pi f\,\Im[x(t)]=\Im\left[\frac{1}{1+t^2}\right],\ essendo\ \ \Im\left[\frac{1}{1+t^2}\right]=\pi e^{-2\pi|f|}$$

$$\Im[x(t)]=\frac{e^{-2\pi|f|}}{j2f}$$

Esercizi – Correlazione e inviluppo complesso

1) Determinare la autocorrelazione del segnale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}, \ \forall t$$

Invece di risolvere l'integrale si può considerare le trasformate, col che

$$F[C_{xx}(\tau)] = |X(f)|^2$$

Quindi, considerando che

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\right] = e^{-\pi^2 f^2}$$

$$F[C_{xx}(\tau)] = e^{-2\pi^2 f^2} \Rightarrow C_{xx}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2}}$$

2) determinare la autocorrelazione del segnale

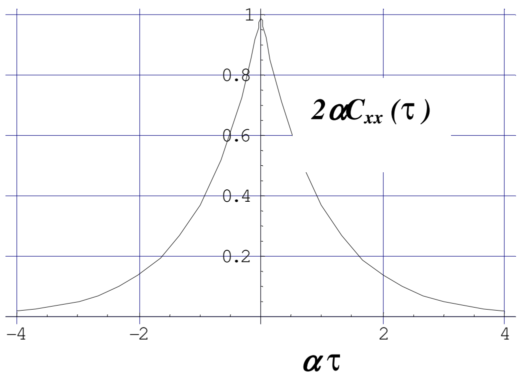
$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t), \quad \alpha > 0$$

Si deve risolvere i due integrali

$$per\ \tau > 0,\ \int_0^\infty e^{-\alpha(t+\tau)} e^{-\alpha t}\, dt = e^{-\alpha\tau} \left. \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_0^\infty = \frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha}$$

$$per\ \tau < 0,\ \int_{-\tau}^\infty e^{-\alpha(t+\tau)} e^{-\alpha t}\, dt = e^{-\alpha\tau} \left. \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right|_{-\tau}^\infty = \frac{e^{\alpha\tau}}{2\alpha}$$

$$quindi\ C_{xx}(\tau) = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{2\alpha}$$



Si può operare anche nel dominio della frequenza, per la proprietà

$$\Im[C_{xx}(\tau)] = |X(f)|^2$$

Quindi, poiché

$$\Im\left[x(t) = e^{-\alpha t}\, u(t), \quad \alpha > 0\right] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

allora

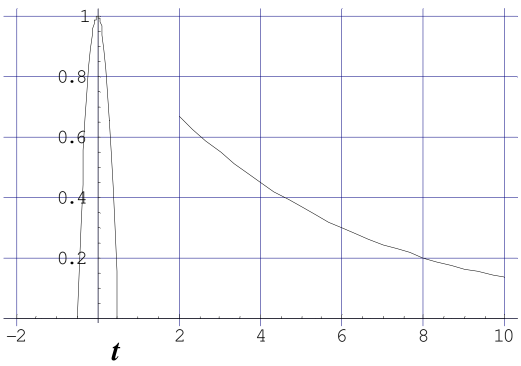
$$\Im[C_{xx}(\tau)] = \left|\frac{1}{\alpha + j2\pi f}\right|^2 = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \cdot \frac{1}{\alpha - j2\pi f} = \frac{1}{2\alpha(\alpha + j2\pi f)} + \frac{1}{2\alpha(\alpha - j2\pi f)}$$

Anti trasformando e ricordando i risultati precedenti

$$C_{xx}(\tau) = \frac{e^{-\alpha\tau}\, u(\tau)}{2\alpha} + \frac{e^{\alpha\tau}\, u(-\tau)}{2\alpha} = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{2\alpha}, \ \alpha > 0$$

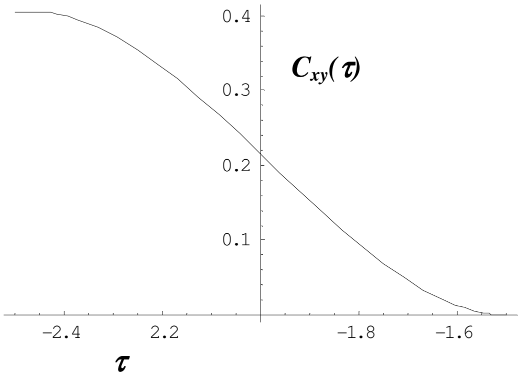
3) determinare la crosscorrelazione $C_{xy}(\tau)$ tra i segnali

$$x(t) = (1 - 4t^2)\,rect(t)$$
$$y(t) = e^{-0.2t}\, u(t-2)$$



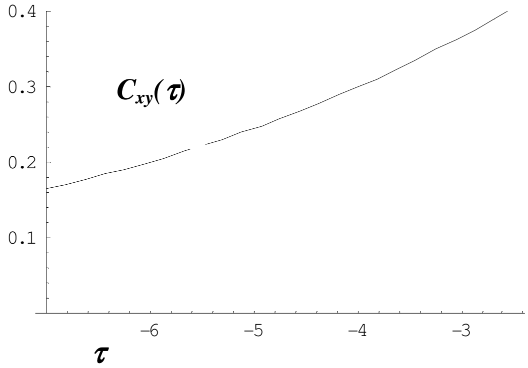
La cross correlazione è evidentemente nulla per $\tau > -3/2$,, poiché in tal caso i domini di definizione di $x(t+\tau)$ ($-\frac{1}{2} - \tau \le t \le \frac{1}{2} - \tau$) e di $y(t)$ ($t \ge 2$) non hanno punti in comune.
Per τ minori di tale valore, si deve distinguere il caso in cui la sovrapposizione del dominio di definizione di $x(t+\tau)$ rispetto a quello di $y(t)$ sia parziale ($-5/2 < \tau \le -3/2$) o totale ($\tau \le -5/2$).
Nel primo caso si ha

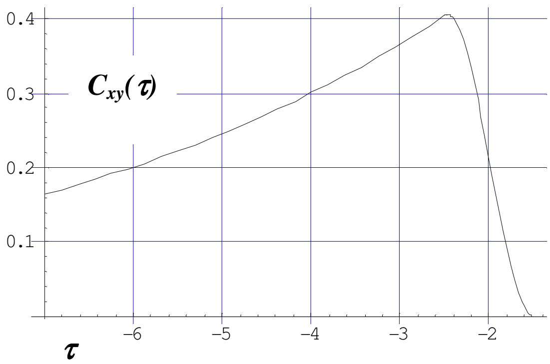
$$C_{xy}(\tau) = \int_2^{1/2-\tau} \left[1 - 4(t+\tau)^2\right] \cdot e^{-0.2t} dt = e^{0.2\tau} \int_{2+\tau}^{1/2} \left[1 - 4(x)^2\right] \cdot e^{-0.2x} dx = -988.7 - 187.7\tau - 13.4\,\tau^2 + 995.3 e^{0.2\tau}$$



Nel secondo caso si ha

$$C_{xy}(\tau)=\int_{-1/2-\tau}^{1/2-\tau}\left[1-4(t+\tau)^2\right]\cdot e^{-0.2t}dt = e^{0.2\tau}\int_{-1/2}^{1/2}\left[1-4(x)^2\right]\cdot e^{-0.2x}dx = 0.6673e^{0.2\tau}$$





4) Trovare la autocorrelazione del segnale

$$x(t)=5\cdot Cos\left[2\pi f_0 t+4t^2+\varphi_0\right]rect(t/50)$$

Conviene riferirsi all'inviluppo complesso

$$i(t)=5\cdot e^{j4t^2}rect(t/50)$$

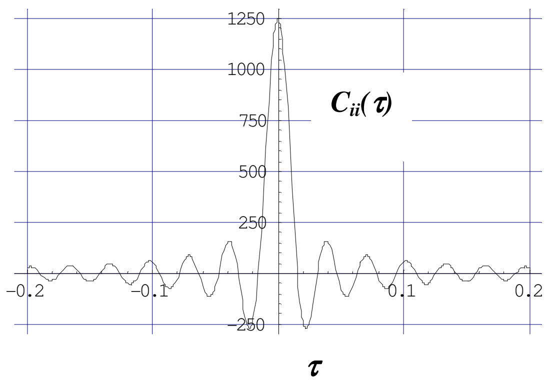
$$C_{ii}(\tau,\tau>0)=25\cdot\int_{-25}^{25-\tau}e^{j4(t+\tau)^2+j\varphi_0}e^{-j4(t)^2-j\varphi_0}dt = 25\cdot\int_{-25}^{25-\tau}e^{j4(2t\tau+\tau^2)}dt = 25\cdot e^{j4\tau^2}\int_{-25}^{25-\tau}e^{j8t\tau}dt =$$
$$25\frac{e^{j\left(200\tau-4\tau^2\right)}-e^{-j\left(200\tau-4\tau^2\right)}}{j8\tau}=\frac{25\cdot\sin\left(200\tau-4\tau^2\right)}{4\tau}$$

$$C_{ii}(\tau,\tau<0)=25\cdot\int_{-25-\tau}^{25} e^{\,j4(t+\tau)^2+j\varphi_0}\,e^{-j4(t)^2-j\varphi_0}\,dt \;=25\cdot\int_{-25-\tau}^{25} e^{\,j4(2t\tau+\tau^2)}\,dt \;=25\cdot e^{\,j4\tau^2}\int_{-25-\tau}^{25} e^{\,j8t\tau}\,dt \;=$$
$$25\frac{e^{\,j(200\tau+4\tau^2)}-e^{-j(200\tau+4\tau^2)}}{j8\tau}=\frac{25\cdot\sin(200\tau+4\tau^2)}{4\tau}$$

In definitiva

$$C_{ii}(\tau)=25\cdot\frac{\sin\left(200|\tau|-4\tau^2\right)}{4|\tau|}$$

Come in figura



Chiaramente
$$C_{xx}(\tau)=\Re\left[25\cdot\frac{\sin\left(200|\tau|-4\tau^2\right)}{4|\tau|}e^{\,j2\pi f_0 t}\right]=25\cdot\frac{\sin\left(200|\tau|-4\tau^2\right)}{4|\tau|}\cos[2\pi f_0 t]$$

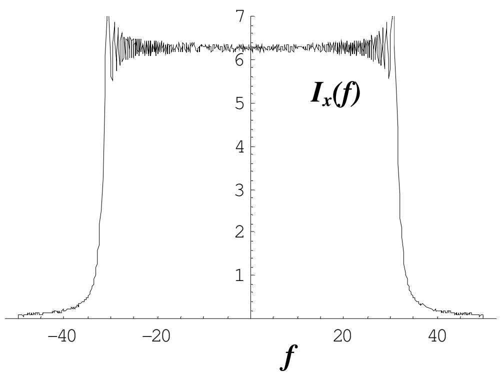
Anche per il calcolo dello spettro di x(t) conviene riferirsi all'inviluppo

$$I_x(f)=5\int_{-25}^{25} e^{\,j4t^2+j\varphi_0}e^{-j2\pi f t}dt\;=5e^{j\varphi_0}\int_{-25}^{25} e^{\,j(4t^2-2\pi f t)}dt=5e^{j\varphi_0}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}f\right)^2}\int_{-25}^{25} e^{\,j\left(2t-\frac{\pi}{2}f\right)^2}dt=5e^{j\varphi_0}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}f\right)^2}\int_{-25}^{25} e^{\,j2\left(t-\frac{\pi}{4}f\right)^2}dt$$

L'integrale si può valutare approssimativamente con la seguenti considerazioni. L'argomento dell'esponenziale (che diventa l'argomento delle due funzioni circolari corrispondenti nella rappresentazione di Eulero) è parabolico nel tempo, con zero per $t = \pi f/4$. Per t distante da tale valore l'argomento cresce parabolicamente e le funzioni circolari oscillano sempre più velocemente all'allontanarsi dallo zero, con contributi integrali che tendono ad cancellarsi reciprocamente. Le oscillazioni complete sono moltissime, in quanto l'argomento assume valori molto elevati rispetto a π (ad esempio, per t da 0 a 25 varia di $4\ 25^2 = 2500$, pari a circa 400 oscillazioni complete). In definitiva, l'unico contributo significativo all'integrale deriva dalla funzione in un conveniente intorno dello zero dell'argomento.
Quindi, se lo shift temporale in modulo (pari a $\pi f/4$) è inferiore a circa 25, ovvero per $|f| < 100/\pi$ l'integrale ha un valore costante k, per f maggiore in modulo è sostanzialmente nullo.
Quindi, con buona approssimazione,

$$I_x(f)\approx 5ke^{j\varphi_0}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}f\right)^2}rect\left(\frac{f}{100/\pi}\right)$$

Che si può confrontare con lo spettro calcolato



Da cui si ricava lo spettro del segnale effettivo

$$X(f) = \frac{I_x(f-f_0)}{2} + \frac{I_x^*(-f-f_0)}{2} \approx 5/2ke^{j\varphi_0} e^{-j\left[\frac{\pi}{2}(f-f_0)\right]^2} rect\left(\frac{f-f_0}{100/\pi}\right) + 5/2k^* e^{j\varphi_0} e^{j\left[\frac{\pi}{2}(-f-f_0)\right]^2} rect\left(\frac{-f-f_0}{100/\pi}\right) =$$

$$5/2ke^{j\varphi_0} e^{-j\left[\frac{\pi}{2}(f-f_0)\right]^2} rect\left(\frac{f-f_0}{100/\pi}\right) + 5/2k^* e^{j\varphi_0} e^{j\left[\frac{\pi}{2}(f+f_0)\right]^2} rect\left(\frac{f+f_0}{100/\pi}\right)$$

Avendo utilizzato le proprietà di simmetria delle funzioni.

Se f_0 è maggiore di $100/\pi$, le due porzioni di spettro trovate non hanno domini comuni, per cui l'energia del segnale corrispondente è pari a

$$2\frac{25}{4}|k|^2\, 2\frac{100}{\pi} = \frac{2500}{\pi}|k|^2$$

Che va confrontata con l'energia del segnale calcolata direttamente, che vale con grande approssimazione (se $f_0 50 \gg 1$)

$$\int |x(t)|^2 dt = 25 \cdot \int_{-25}^{25} Cos^2\left[2\pi f_0 t + 4t^2 + \varphi_0\right] dt \approx 25 \cdot 50/2 = 625$$

Per confronto, $|k| \approx 1.25$ (moltiplicato per 5 fa 6, da confrontare col valore dello spettro calcolato).

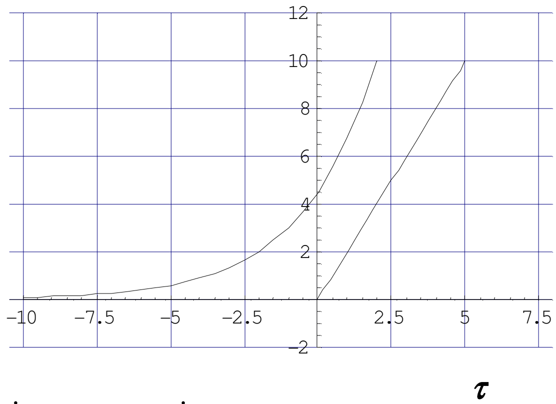
Esercizi – Risposte di sistemi LTI

1) Il segnale $2t,\ 0 \le t \le 5$ è l'ingresso si un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = 10e^{-0.4t}\,u(t)$ determinare l'uscita y(t).

Operando in t si deve determinare la convoluzione tra x(t) e h(t)

$$\int 20\tau e^{-0.4(t-\tau)}\,d\tau$$

per i limiti di integrazione si fa riferimento alla figura (ove t = 2)



vi sono tre casi

- per t < 0, y(t) = 0;
- per 0 ≤ t < 5, i limiti di integrazione sono 0, t
- per t ≥ 5, i limiti di integrazione sono 0, 5

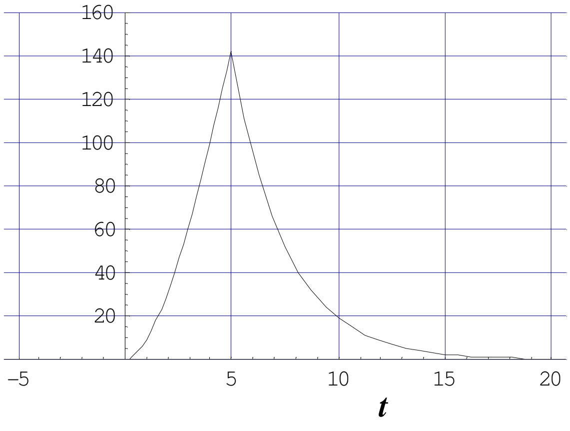
nel secondo caso si ha

$$\int_0^t 20\tau e^{-0.4(t-\tau)}\,d\tau = -125 + 125e^{-0.4t} + 50t$$

nel terzo caso si ha

$$\int_0^5 20\tau e^{-0.4(t-\tau)}\,d\tau = 1048.63e^{-0.4t}$$

y(t) è dato in figura

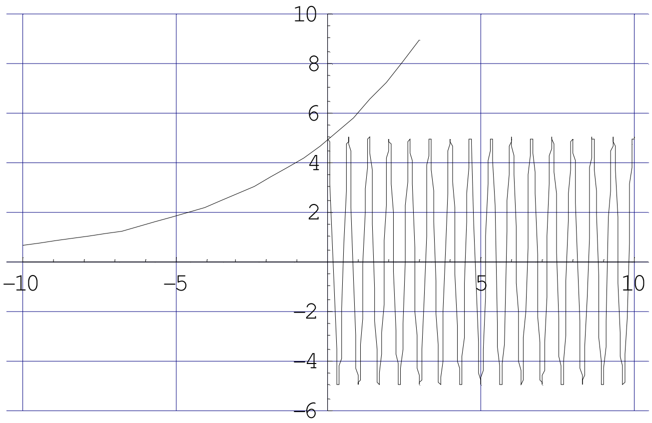


2) il segnale $x(t)=5\cos(2\pi 1.5t)u(t)$ è applicato ad un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)=20e^{-0.2t}\,u(t-4)$, determinare l'uscita y(t).

Operando in t si deve determinare la convoluzione tra x(t) e h(t)

$$\int 5\cos(2\pi 1.5t)u(t)\cdot 20e^{-0.2(t-\tau)}\,u[(t-\tau)-4]d\tau$$

per i limiti di integrazione si fa riferimento alla figura (ove t = 7)



τ

esistono due casi

- per t < 4, y(t) = 0
- per t ≥ 4 i limiti di integrazione sono 0, -4+t

quindi, per t ≥ 4

$$\int_0^{-4+t} 100\cos(2\pi 1.5t)\cdot e^{-0.2(t-\tau)}\,d\tau = -0.225e^{-0.2t}+0.101\cos(2\pi 1.5t)+4.76\sin(2\pi 1.5t)$$

3) il segnale $e^{-4|t|}$,$\forall t$ è applicato ad un sistema LTI con risposta impulsiva $\left[\delta(t)+e^{-2t}\right]\cdot u(t+4)$, determinare la risposta y(t).

operando in f, occorre determinare le rispettive trasformate e si ha

$$\Im\left[e^{-4|t|}\ ,\forall t\right]=\frac{8}{16+4\pi^2 f^2} \qquad \Im\left\{\left[\delta(t)+e^{-2t}\right]\cdot u(t+4)\right\}=\int_{-4}^{\infty}\left[\delta(t)+e^{-2t}\right]e^{-j2\pi f t}\,dt=1+\frac{e^{8+j8\pi f}}{2+j2\pi f}$$

quindi

$$\Im[y(t)] = \frac{8}{16+4\pi^2 f^2}\cdot\left[1+\frac{e^{8+j8\pi f}}{2+j2\pi f}\right] = \frac{8}{16+4\pi^2 f^2} + \frac{8}{16+4\pi^2 f^2}\cdot\frac{e^{8+j8\pi f}}{2+j2\pi f}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{8}{16+4\pi^2 f^2}\right] = e^{-4|t|}$$

riguardo l' altro termine, a parte $e^{8+j8\pi f}$ *che rappresenta una c ost ante e uno shift nel tempo*

$$\frac{1}{16+4\pi^2 f^2}\cdot\frac{1}{2+j2\pi f} = \frac{j\pi f}{6(16+4\pi^2 f^2)} - \frac{1}{6(16+4\pi^2 f^2)} + \frac{1}{12(2+j2\pi f)}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{j\pi f}{6(16+4\pi^2 f^2)}\right] = \Im^{-1}\left[\frac{j2\pi f\cdot 8}{6\cdot 8(16+4\pi^2 f^2)}\right] = \frac{1}{48}\frac{d}{dt}e^{-4|t|}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{1}{6(16+4\pi^2 f^2)}\right] = \Im^{-1}\left[\frac{8}{6\cdot 8(16+4\pi^2 f^2)}\right] = \frac{1}{48}e^{-4|t|}$$

$$\Im^{-1}\left[\frac{1}{12(2+j2\pi f)}\right] = \frac{e^{-2t}u(t)}{12}$$