Introduzione alle Catene di Markov

Giuseppe BIANCHI

Dipartimento di Ingegneria Elettronica
Università di Roma, Tor Vergata
giuseppe.bianchi@uniroma2.it

Versione 1.3 – Giugno 2009

A.A. 2008-2009

Questa breve dispensa ha lo scopo di introdurre lo studente al concetto di Catena di Markov, evitando complicazioni di carattere formale, ma cercando di derivare le caratteristiche di una catena di Markov da esempi e considerazioni di carattere intuitivo. La trattazione seguente è pertanto necessariamente incompleta: si rimanda a testi specialistici per una trattazione più formale.

INDICE

I LA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE NEGATIVA 3

I.1 DEFINIZIONE 3

I.1.1 Processo degli arrivi markoviano 3

I.1.2 Definizione: Processo di servizio markoviano 3

I.1.3 Esempio 3

I.2 PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE NEGATIVA 4

I.2.1 Derivazione della distribuzione esponenziale negativa 5

I.2.2 Esempio 1 6

I.2.3 Esempio 2 – paradosso della vita residua 6

I.3 DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE E DISTRIBUZIONE DI POISSON 6

I.3.1 Dimostrazione 6

II ARRIVI ESPONENZIALI E PROCESSI DI PURA NASCITA 8

II.1 FREQUENZE DI TRANSIZIONE DI STATO 9

II.2 FLUSSI DI PROBABILITÀ 10

III CATENE DI MARKOV E DISTRIBUZIONI STAZIONARIE 11

III.1 DEFINIZIONE DI CATENA DI MARKOV 12

III.1.1 Esempio: dimostriamo che un sistema M/M/1 è una catena di Markov 12

III.2 DISTRIBUZIONE STAZIONARIA: ESEMPIO DI PROCESSO ON/OFF 15

III.2.1 Calcolo diretto della distribuzione stazionaria 17

III.2.2 Teorema di conservazione dei flussi di probabilità 18

III.3 DISTRIBUZIONE STAZIONARIA: CASO M/M/1 20

III.4 DISTRIBUZIONE STAZIONARIA: CASO M/M/N/N 21

IV PRESTAZIONI DI UN SISTEMA A CODA 23

IV.1 PRESTAZIONI DI UN SISTEMA M/M/1 23

IV.1.1 Esempio 25

IV.2 RISULTATO DI LITTLE 26

IV.2.1 Risultato di Little: esempi 27

IV.2.2 Risultato di Little: giustificazione 28

I La distribuzione esponenziale negativa

I.1 Definizione

Una variabile casuale T ha distribuzione esponenziale negativa, con parametro λ, quando la sua funzione di distribuzione è:

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

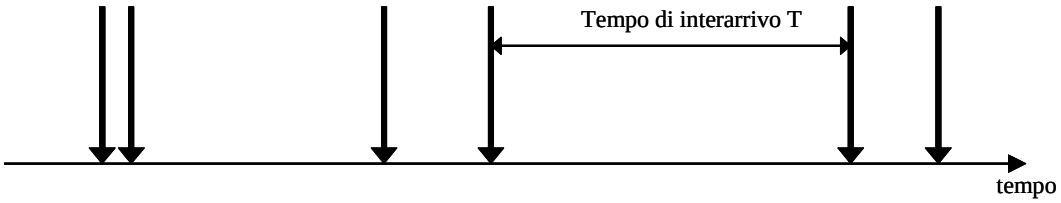
Il valor medio della variabile casuale T è legato al suo parametro λ dalla relazione[1]:

$$E[T] = \frac{1}{\lambda}$$

Quando la v.c. T rappresenta un "tempo" (per esempio tempo di interarrivo tra due chiamate, o tempo di servizio di un pacchetto, misurato ad esempio in secondi) allora il parametro λ ha le dimensioni di una frequenza (secondi^{-1}).

I.1.1 Processo degli arrivi markoviano

Un processo degli arrivi è detto **markoviano** se la distribuzione dei tempi di interarrivo è esponenziale negativa.



I.1.2 Definizione: Processo di servizio markoviano

Un processo di servizio è detto **markoviano** se la distribuzione del tempo di servizio è esponenziale negativa.

I.1.3 Esempio

Supponiamo che in un'ora arrivino mediamente 2834 chiamate ad una centrale telefonica. Assumiamo che la distribuzione del tempo di interarrivo tra due chiamate consecutive sia esponenziale negativa. Notando che il tempo medio di interarrivo tra due chiamate consecutive è E[T] = 3600/2834 = 1.27 secondi, la frequenza di arrivo risulta essere λ=1/E[T]=2834/3600=0.787 chiamate/secondo.

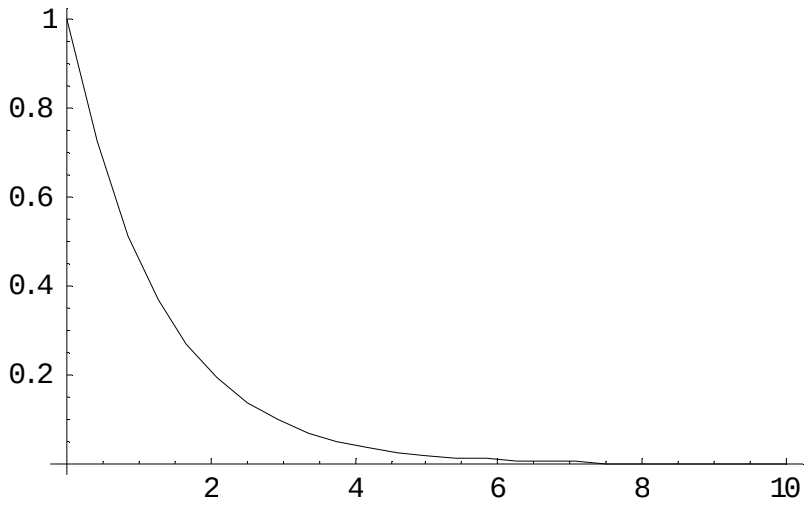
---

[1] Infatti, applicando la ben nota formula per il calcolo del valor medio di una v.c. a partire dall'espressione della sua funzione di distribuzione, $E[T] = \int_0^\infty (1 - F_T(t))dt = \int_0^\infty \left(1 - \left[1 - e^{-\lambda t}\right]\right)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$

Grazie alla conoscenza della distribuzione di probabilità del tempo di interarrivo, è semplice calcolare, ad esempio, la probabilità che due chiamate consecutive siano intervallate da più di due secondi:

$$P\{T > 2\} = 1 - P\{T \le 2\} = 1 - \left(1 - e^{-0.787 \cdot 2}\right) = e^{-0.787 \cdot 2} = 0.207 = 20.7\%$$

A titolo di esempio si riporta, nel grafico seguente, l'andamento della probabilità che due chiamate siano intervallate da più di t secondi, per t variabile tra 0 e 10. Il parametro λ è fissato a 0.787 chiamate/secondo.



Come si vede graficamente, per t=10 la probabilità è prossima allo zero. Ma non è ovviamente zero, ed infatti il valore numerico è

$$P\{T > 10\} == e^{-0.787 \cdot 10} = 0.00038 = 0.038\%$$

I.2 Proprietà fondamentali della distribuzione esponenziale negativa

La distribuzione esponenziale negativa è l'unica distribuzione statistica che gode delle seguenti proprietà.

1. **assenza di memoria**: la probabilità di avere un evento (ad esempio un arrivo) a partire da un dato istante di tempo non dipende dalla storia precedente;
2. la probabilità di aveve un evento (ad es. un arrivo) in un intervallo di tempo piccolo Δt è data da $\lambda \Delta t$. In altre parole, tale probabilità è, a meno di infinitesimi di ordine superiore, **proporzionale alla durata dell'intervallo di tempo considerato**, essendo λ (parametro della distribuzione esponenziale negativa) la costante di proporzionalità.

I.2.1 Derivazione della distribuzione esponenziale negativa

Supponiamo di avere un generico processo degli arrivi, dove per "generico" intendiamo non nota la distribuzione di probabilità del tempo di interarrivo. Supponiamo però di sapere che

1. la probabilità di avere un arrivo in un intervallo di tempo Δt "piccolo" sia (a meno di infinitesimi di ordine superiore) proporzionale alla durata dell'intervallo stesso, ovvero $P\{arrivo\ in\ \Delta t\} \propto \Delta t$; supponiamo in particolare che la costante di proporzionalità sia λ, ovvero $P\{arrivo\ in\ \Delta t\} = \lambda \Delta t$;
2. che tale probabilità sia indipendente dalla scelta dell'intervallo di tempo Δt; come caso particolare, tale probabilità è indipendente da quanto è successo precedentemente a questo intervallo (proprietà di assenza di memoria);
3. che la probabilità di avere più di un arrivo in Δt sia piccola rispetto a quella di avere un singolo arrivo - ovvero che la probabilità di avere arrivi multipli sia o(Δt).

Ci chiediamo: quale è la probabilità di NON avere alcun arrivo in un intervallo di tempo di durata *t*? Per rispondere a questa domanda, chiamiamo $P_0(t)$ la probabilità di non avere alcun arrivo nell'intervallo temporale (0,*t*). Notando che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, la probabilità di non avere alcun arrivo in un intervallo di tempo $t + \Delta t$ è data (per ipotesi di indipendenza) dal prodotto della probabilità di non aver avuto alcun arrivo nel tempo *t* (ovvero, per definizione, $P_0(t)$) e di non avere alcun arrivo nell'intervallo Δt (ovvero 1- λΔt), possiamo scrivere:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot(1-\lambda\Delta t) = P_0(t) - \lambda P_0(t)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$$

Passando al limite per $\Delta t \to 0$ otteniamo una semplice equazione differenziale del primo ordine:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

che possiamo risolvere imponendo la condizione al contorno $P_0(0) = 1$, condizione che vale in quanto $P_0(t)$ è una probabilità, e che la probabilità di non avere alcun arrivo in un tempo nullo è ovviamente 1. Il risultato finale è:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Il risultato appena dimostrato dice la seguente cosa: **se valgono le ipotesi 1-3 precedenti, il tempo di interarrivo è distribuito esponenzialmente.** Infatti, per definizione di $P_0(t)$,

$$P\{T \le t\} = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$$

I.2.2 Esempio 1

Supponiamo che una chiamata telefonica sia distribuita esponenzialmente. Supponiamo che la sua durata media sia di 120 secondi. Quale è la probabilità che la chiamata termini in un intervallo piccolo Δt, dato che la chiamata è durata gia' 90 secondi? Cambia qualcosa se la chiamata è durata 180 secondi? La risposta ovviamente è sempre $\mu \Delta t$, con $\mu=1/120$, a prescindere da quanto la chiamata sia durata in precedenza.

Si noti che in questo esempio abbiamo scelto una distribuzione esponenziale negativa in cui l'evento di riferimento è la fine della chiamata.

I.2.3 Esempio 2 – paradosso della vita residua

Supponiamo che il tempo di interarrivo tra due autobus ad una fermata segua una legge esponenziale negativa. Supponiamo che mediamente arrivi un autobus ogni 10 minuti. Se un passeggero arriva ad un istante casuale, quanto dovrà mediamente aspettare?

Ora, intuitivamente potrebbe sembrare ragionevole rispondere dicendo "5 minuti", ovvero la metà del tempo di interarrivo tra due autobus. In realtà, la risposta corretta è 10 minuti (!) in quanto il tempo di attesa del prossimo autobus non dipende, per le proprietà della distribuzione esponenziale negativa, da quanto tempo è già passato.

Si noti che questa proprietà vale solo ed esclusivamente perché abbiamo assunto un processo di interarrivo degli autobus con distribuzione esponenziale negativa: se avessimo assunto una distribuzione deterministica (ovvero un autobus esattamente ogni 10 minuti), la risposta corretta sarebbe stata 5 minuti.

Questo esempio è chiamato "paradosso della vita residua", in quanto la risposta sembra essere paradossale. In realtà non c'e' nessun paradosso; semplicemente il tempo di attesa del prossimo autobus è sicuramente maggiore della metà del valore medio (i 5 minuti di cui sopra) perché è più probabile che un passeggero arrivi in un intervallo "grande" tra due arrivi consecutivi di autobus.

I.3 Distribuzione esponenziale e distribuzione di Poisson

Consideriamo un processo di arrivi markoviano (ovvero un processo per cui il tempo di interarrivo sia distribuito esponenzialmente). Supponiamo che il tempo medio di interarrivo sia $1/\lambda$. Consideriamo un generico intervallo t. Vale il seguente risultato: **il numero di arrivi in un intervallo t è una variabile casuale con distribuzione di Poisson:**

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

I.3.1 Dimostrazione

Già sappiamo (v. sezione I.2.1) che la probabilità $P_0(t)$ che non vi siano arrivi nell'intervallo di tempo (0,t) è data dalla la soluzione dell'equazione differenziale

$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$, ovvero:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Concentriamoci su un istante di tempo $t + \Delta t$ con Δt piccolo. Possiamo calcolare la probabilità di avere un arrivo in $t + \Delta t$ come: i) la probabilità di avere avuto 0 arrivi al tempo t e di avere 1 arrivo nell'intervallo di tempo Δt più la probabilità di aveve avuto 1 arrivo al tempo t e di non avere nuovi arrivi nell'intervallo di tempo Δt. In formule:

$$P_1(t+\Delta t) = P_0(t)\cdot \lambda\Delta t + P_1(t)(1-\lambda\Delta t) \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1(t+\Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

Analogamente, possiamo generalizzare e calcolare la probabilità di avere k arrivi nel tempo $t + \Delta t$ come:

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(t)\cdot \lambda\Delta t + P_k(t)(1-\lambda\Delta t) \quad \Rightarrow \quad \frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

dove abbiamo trascurando l'eventualità di arrivi multipli nell'intervallo di tempo Δt (la cui probabilità, come detto precedentemente, è $o(\Delta t)$ per una distribuzione esponenziale). Passando al limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

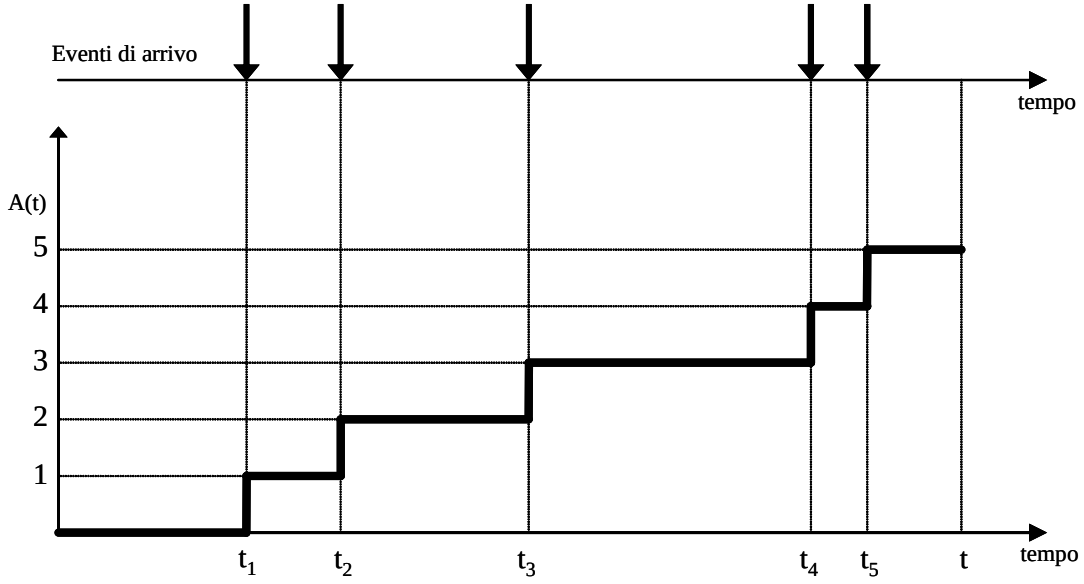
$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\lambda t} \\ P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) \\ P_2'(t) = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t) \\ \dots \\ P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) \end{cases}$$

L'equazione relativa alla seconda riga è immediatamente risolta usando il termine $P_0(t)$ noto dalla prima riga, ed applicando l'ovvia condizione al contorno $P_1(0) = 0$ (la probabilità di avere un arrivo al tempo 0 è ovviamente nulla). Una volta calcolato $P_1(t)$ è possibile calcolare $P_2(t)$ risolvendo l'equazione differenziale indicata nella terza riga, e così via per qualunque valore k scelto. Il risultato è, come volevasi dimostrare, la distribuzione di Poisson:

$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\lambda t} \\ P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \\ P_2(t) = \dfrac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \\ \dots \\ P_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{cases}$$

II Arrivi esponenziali e processi di pura nascita

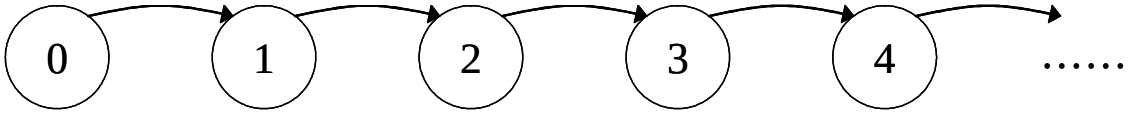
Lo studio fatto fino ad ora ci ha permesso di mettere in relazione un processo degli arrivi, espresso in termini della *distribuzione di probabilità della variabile casuale continua tempo di interarrivo*, con un processo di "conteggio", espresso in termini di *distribuzione di probabilità della variabile casuale discreta numero di arrivi al tempo t*. Nell'importante caso di arrivi markoviani che stiamo considerando, le distribuzioni di probabilità in questione sono la distribuzione esponenziale negativa per il tempo di interarrivo, e la distribuzione di Poisson per il numero di arrivi al tempo *t*.



La Figura precedente riporta una illustrazione grafica della relazione tra eventi di arrivo e processo A(*t*) che rappresenta il numero di arrivi al tempo *t*. Il processo A(*t*) è un "processo di pura nascita", in quanto non decresce mai all'aumentare del tempo, ma si incrementa sempre di una unità (nascita) ad ogni arrivo successivo. Nel caso particolare di arrivi markoviani, si noti che il processo A(*t*) non fa mai "salti" di più di una unità (abbiamo infatti detto che la probabilità di avere arrivi multipli in un intervallo $\Delta t \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla probabilità di avere un arrivo singolo, data da $\lambda \Delta t$).

La figura precedente evidenzia come il processo A(*t*) si evolva attraverso "stati" discreti[2], dove uno stato rappresenta il numero di eventi di arrivo conteggiati fino all'istante *t* considerato. E' utile rappresentare graficamente gli stati del processo con il diagramma illustrato nella figura seguente:

[2] Un processo stocastico a stati discreti è spesso chiamato "catena". Nel caso specifico in questione il processo A(t) è una catena tempo-continua in quanto è dipendente dal parametro t continuo.



dove i cerchi rappresentano un possibile **stato** del sistema, A(t)=0, 1, 2, …, e le frecce rappresentano le possibili **transizioni di stato**, ovvero la presenza di una freccia tra due stati implica che è possibile avere un "salto" tra i due stati in questione. Per esempio, nel caso del processo di pura nascita A(t), come si vede dal diagramma, le uniche transizioni di stato possibile sono tra lo stato k e lo stato k+1. Non sono infatti possibili salti multipli, e non è possibile – si noti che le transizioni di stato vanno nel verso della freccia - un ritorno allo stato k una volta raggiunto lo stato k+1 (essendo il processo di pura nascita, una volta contati 10 arrivi non c'e' modo di tornare allo stato 9, intendendo per stato il numero di arrivi contati!!).

II.1 Frequenze di transizione di stato

Siamo arrivati al momento più importante di questa trattazione. Ci chiediamo: è possibile (e/o utile) assegnare un valore numerico alle frecce, disegnate nel diagramma a stati precedente, che rappresentano le transizioni di stato? La risposta è: per processi markoviani, sicuramente si. In particolare diamo la seguente definizione:

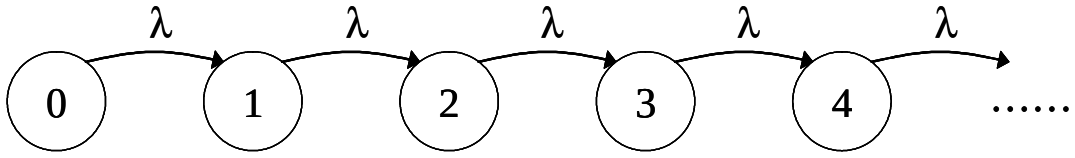
> *Chiamiamo **frequenza di transizione di stato** tra gli stati k ed h il rapporto fra la probabilità che, assumendo il sistema in un dato stato k, avvenga una transizione di stato k→h in un intervallo di tempo tendente a 0, e l'intervallo di tempo considerato. In altre parole, detto k uno stato origine e h uno stato destinazione, la frequenza di transizione di stato q(k→h) è definita come:*

$$q(k \to h) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(k \to h \text{ in } \Delta t \mid \text{sistema nello stato } k\right)}{\Delta t}$$

L'unità di misura di una frequenza di transizione è *probabilità condizionata su tempo*, ovvero secondi^{-1}. Nel caso particolare in questione (arrivi markoviani), è facile derivare le frequenze di transizione. Infatti, l'inico caso in cui la frequenza di transizione assume valore non nullo è la transizione da un generico stato k allo stato k+1. La probabilità di transizione dallo stato k allo stato k+1 in un intervallo di tempo Δt coincide con la probabilità di avere un arrivo nell'intervallo di tempo Δt. Poiché i tempi di interarrivo hanno distribuzione esponenziale con parametro λ, la probabilità di un arrivo in Δt non dipende dalla storia passata, ed è banalmente data da $\lambda\Delta t$. Concludiamo quindi che, per qualunque stato k considerato,

$$q(k \to k+1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} = \lambda$$

E' consuetudine riportare graficamente le frequenze di transizione nel diagramma di stato, associandole agli archi che rappresentano le transizioni di stato (vedi figura seguente).



Una importante osservazione è che la definizione di frequenza di transizione data precedentemente **non risulterebbe univoca per processi non markoviani**. Infatti, la probabilità di transizione da uno stato *k* ad uno stato *k*+1 dipenderebbe dall'evoluzione del processo e dal tempo di permanenza nello stato considerato. Per esempio, se gli arrivi fossero deterministici (ad esempio 1 arrivo al secondo), la frequenza di transizione dallo stato *k* allo stato *k*+1 sarebbe di 1 transizione al secondo, ma ovviamente la probabilità di avere o meno una transizione a partire dallo stato *k* considerato dipenderebbe da quanto tempo il processo ha passato nello stato stesso!

II.2 Flussi di probabilità

L'analisi dell'esempio di processo di pura nascita considerato finora ci permette di trarre un'ulteriore importante informazione. Definiamo **flusso di probabilità** uscente da un dato stato *k* ed entrante in un altro stato *h*, al tempo *t*, come il prodotto tra la probabilità di essere nello stato considerato al tempo *t* e la frequenza di transizione tra gli stati considerati, ovvero:

$$\varphi(k \to h, t) = P_k(t) q(k \to h)$$

Ricordando la definizione di frequenza di transizione di stato data nella sezione II.1, e sostituendo nella formula precedente, otteniamo:

$$\varphi(k \to h, t) = P_k(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(k \to h \text{ in } \Delta t \mid \text{sistema nello stato } k\right)}{\Delta t} =$$

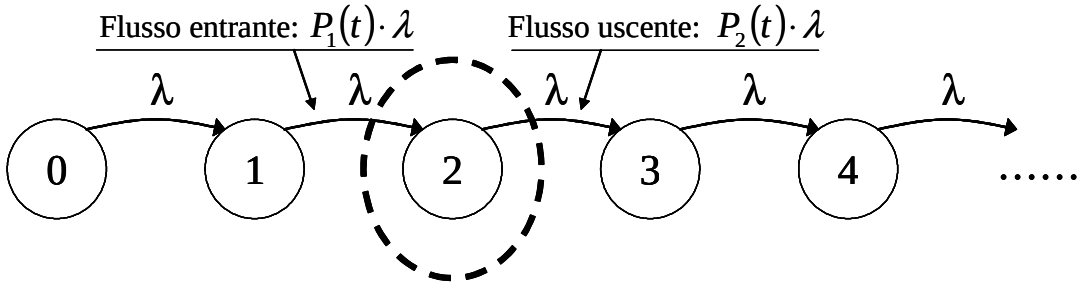
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(k \to h \text{ in } \Delta t, \text{sistema nello stato } k\right)}{\Delta t}$$

Tale formula ci dice che un flusso di probabilità rappresenta la frequenza (ovvero probabilità su tempo) assoluta (si noti la differenza con la corrispondente probabilità condizionata nel caso di transizione di stato) di passare, al tempo *t*, dallo stato *k* allo stato *h*. In generale in flusso di probabilità cosi' definito dipende dal tempo *t* considerato. Si dimostra[3] che:

[3] La dimostrazione coincide con quella proposta nella sezione I.3.1. In particolare, per il caso particolare di un processo di pura nascita, basta dimostrare che, in un intervallo (t,t+Δt), vale l'espressione

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_k(t+\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = P_k'(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t)$$

la variazione di probabilità istantanea per un dato stato è uguale alla somma algebrica dei flussi in entrata ed in uscita dallo stato considerato.



Applicando questa considerazione, sarebbe stato immediato ottenere, con riferimento alla figura precedente che rappresenta il diagramma di transizione di stato per un processo di pura nascita, l'equazione differenziale:

$$P_2^{'}(t) = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

dove:

- La variazione istantanea di probabilità nello stato 2 è la derivata prima $P_2^{'}(t)$;
- Il flusso entrante nello stato 2 è $\lambda P_1(t)$: essendo entrante nello stato è preso con segno positivo;
- Il flusso uscente dallo stato 2 è $\lambda P_2(t)$: essendo uscente dallo stato è preso con segno negativo.

III Catene di Markov e distribuzioni stazionarie

Il processo di pura nascita studiato nella sezione precedente rappresenta un primo esempio, il piu' elementare possibile, di una catena di Markov tempo-continua. Tale processo è infatti:

- Una catena, in quanto lo spazio degli stati è discreto
- E' una catena di Markov in quanto (come vedremo tra breve) la probabilità di transizione di stato dipende esclusivamente dallo stato di partenza e non dall'evoluzione precedente del processo e/o dal tempo speso nello stato considerato.

Tuttavia il processo di pura nascita è una catena un po' anomala, ed in particolare di scarso interesse pratico. Infatti, l'evoluzione del processo di pura nascita è particolare in quanto, all'aumentare del tempo *t*, la probabilità di essere in uno stato *k* comunque scelto tende a 0. Infatti, per *t* tendente ad infinito, è intuitivo comprendere come il numero di arrivi tenderà a diventare infinito, e quindi la probabilità di avere un numero finito di arrivi tende a 0. Si usa dire che il processo di pura nascita **non ammette una distribuzione a regime**

---

e rileggere tale espressione come somma algebrica dei flussi attraverso lo stato *k*.

(ovvero una **distribuzione stazionaria** ovvero una distribuzione in condizioni di **equilibrio statistico**). Si usa anche dire che la catena in questione è instabile.

In questa sezione introdurremo catene di Markov che, a differenza del processo di pura nascita, ammettono una distribuzione a regime, capiremo a cosa serve tale distribuzione ed impareremo a calcolarla.

III.1 Definizione di catena di Markov

Nel prosieguo, come perlatro fatto finora, ci limitiamo all'analisi di processi tempo-continui. La definizione che stiamo per proporre non è tipicamente quella data nei testi di probabilità, ma ne è una diretta conseguenza (ovvero risulta dimostrabile a partire dalla definizione rigorosa[4] - rimandiamo il lettore interessato alla consultazione dei testi specialistici). Riteniamo però che la definizione seguente sia per noi preferibile in quanto, oltre ad essere decisamente più semplice, mette immediatamente in luce alcune proprietà chiave delle catene di Markov che poi verranno sfruttate nella nostra trattazione.

> *Con il termine "Catena di Markov" definiamo un processo stocastico a stati discreti che gode delle seguenti due proprietà: 1) il tempo di permanenza in ogni stato è una variabile casuale con distribuzione esponenziale negativa, e 2) quando avviene una transizione di stato, la corrispondente probabilità di andare verso un dato altro stato dipende al più dal solo stato di partenza e non dagli stati visitati precedentemente.*

III.1.1 Esempio: dimostriamo che un sistema M/M/1 è una catena di Markov

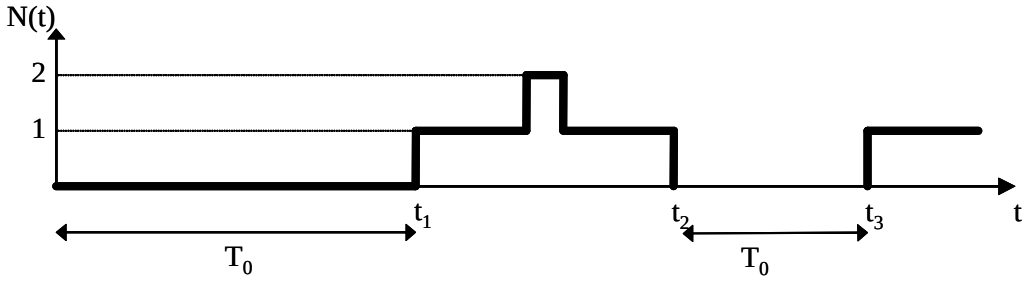
Un sistema M/M/1 è un sistema caratterizzato da un numero infinito di utenti, da un servente e da numero infinito di posti in coda. Il processo degli arrivi al sistema è un processo di Poisson con frequenza λ (ovvero la distribuzione del tempo di interarrivo è esponenziale negativa con parametro λ), ed il tempo di servizio per ogni cliente nel sistema è una variabile casuale con distribuzione esponenziale negativa con parametro μ (ovvero il tempo medio di servizio è $1/\mu$).

Per dimostrare che il processo N(t) definito come numero di utenti nel sistema rappresenta una catena di Markov, cominciamo ad analizzare lo stato 0, ovvero lo stato che caratterizza il sistema vuoto. Supponiamo in particolare che al tempo t=0 il sistema si trovi nello stato 0. In tale condizioni, non essendoci alcun cliente in servizio, l'unico evento possibile è l'arrivo di un nuovo cliente al sistema. Poiché il tempo di interarrivo è distribuito esponenzialmente con parametro λ, sfruttando la proprietà di assenza di memoria, possiamo

[4] Una catena di Markov è un processo stocastico a stati discreti X(t), che gode della seguente proprietà: scelti arbitrariamente n+1 istanti di tempo $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, e per qualunque scelta arbitraria degli stati discreti $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n$, vale la seguente proprietà:
$P(X(t_n) = s_n \mid X(t_0) = s_0, X(t_1) = s_1, \ldots, X(t_{n-1}) = s_{n-1}) = P(X(t_n) = s_n \mid X(t_{n-1}) = s_{n-1})$

concludere che la variabile casuale T_0 è a sua volta distribuita esponenzialmente con parametro λ e con valor medio $E[T_0]=1/\lambda$, ed è rappresentativa (vedi figura seguente):

- sia del tempo che intercorre fra l'istante t=0 e l'istante t_1 di arrivo di un cliente
- che del tempo di permanenza del sistema nello stato 0 tra un istante di ritorno allo stato 0 (tempo t_2 in figura) ed il successivo istante di arrivo di un nuovo cliente (tempo t_3)



Consideriamo a questo punto lo stato 1. Abbiamo una transizione di stato in due soli casi:

- se un nuovo cliente arriva prima che il cliente nel sistema abbia finito il servizio (in gergo una "nascita"), avremo una transizione 1→2;
- se invece il cliente finisce il servizio prima che un nuovo utente entri nel sistema (in gergo una "morte"), avremo una transizione 1→0.

Si noti che abbiamo trascurato il caso in cui nello stesso istante di tempo si abbia contemporaneamente la fine del servizio e l'arrivo di un nuovo utente, in quanto questo evento ha probabilità infinitesima di ordine superiore rispetto ad un singolo arrivo o partenza.

Per valutare se il tempo di permanenza nello stato 1 è distribuito esponenzialmente, ed in questo caso con quale parametro, possiamo operare come segue. La probabilità di uscire dallo stato 1 in un intervallino di tempo Δt può essere scritta come segue:

$$P(arrivo\ in\ \Delta t)\times[1-P(partenza\ in\ \Delta t)]+P(partenza\ in\ \Delta t)\times[1-P(arrivo\ in\ \Delta t)]$$

dove

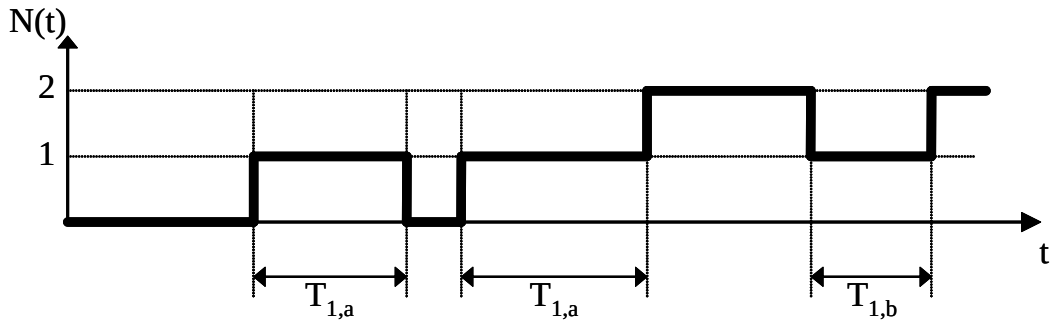
$$P(arrivo\ in\ \Delta t)=\lambda\Delta t$$
$$P(partenza\ in\ \Delta t)=\mu\Delta t$$

pertanto la probabilità di uscire dallo stato 1 in un intervallo di tempo Δt può essere espressa come:

$$\lambda\Delta t\times[1-\mu\Delta t]+\mu\Delta t\times[1-\lambda\Delta t]=$$
$$=\lambda\Delta t-\lambda\mu(\Delta t)^2+\mu\Delta t-\lambda\mu(\Delta t)^2=$$
$$=(\lambda+\mu)\Delta t+o(\Delta t)$$

Da cui concludiamo che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, la probabilità di uscire dallo stato 1 è proporzionale all'intervallino di tempo Δt considerato (e che quindi la distribuzione è esponenziale negativa), e che la costante di proporzionalità è $\lambda+\mu$ (e che quindi questo è il parametro della distribuzione esponenziale negativa in questione, ovvero che, detta T_1 la variabile casuale che rappresenta il tempo di permanenza del sistema nello stato 1, è $P(T_1 \le t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$).

Si noti infine che la dimostrazione precedente è valida sia per il caso in cui il sistema sia entrato nello stato 1 a partire dallo stato 0 (ovvero grazie ad un arrivo – caso $T_{1,a}$ nella figura seguente), sia che il sistema sia entrato nello stato 1 a partire dallo stato 2 (ovvero grazie ad una partenza – caso $T_{1,b}$ nella figura seguente).



Rimane da dimostrare che la probabilità di transizione di stato dipende esclusivamente dallo stato di partenza, e non dagli stati visitati precedentemente. A tale proposito è banale[5] dimostrare che, assumendo di avere una transizione di stato, la probabilità di passare dallo stato 1 allo stato 2 è data da

$$P(1 \to 2 \mid \textit{transizione di stato}) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

ed analogamente che

$$P(1 \to 0 \mid \textit{transizione di stato}) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

da cui si evince che tali probabilità non dipendono dalla storia passata, ma solo dai tassi di nascita e morte.

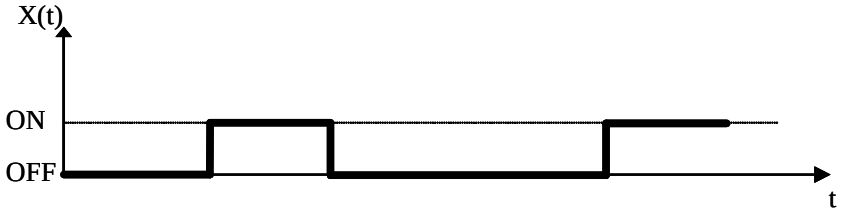
Infine, l'analisi svolta per il caso di stato 1 può essere ripetuta per qualunque altro stato *k*. Da cui concludiamo che il processo N(*t*) che rappresenta gli utenti in un sistema M/M/1 è una catena di Markov.

---

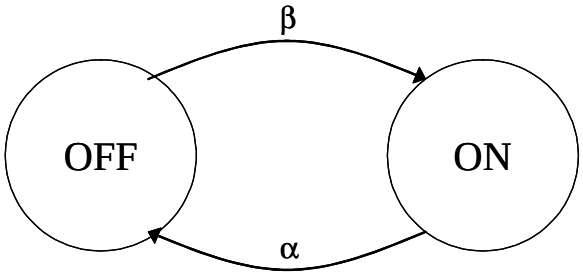
[5] $P(1 \to 2 \mid tx\_stato) = \int_0^\infty P(arrivo\ in\ (t, t+dt)) P(servizio > t) dt = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

III.2 Distribuzione stazionaria: esempio di processo ON/OFF

L'esempio più elementare di catena di Markov è un processo a due stati, ad esempio una risorsa che si alterna tra stato ON (occupato) ed OFF (libero). Il processo è markoviano se il tempo di permanenza negli stati è distribuito esponenzialmente. Chiamiamo con T_{ON} e T_{OFF} i tempi medi di permanenza nei relativi stati.



Notiamo in primo luogo che la transizione di stato tra uno stato ON ed uno stato OFF avviene nel momento in cui termina il periodo di tempo in cui la risorsa è occupata, ovvero T_{ON}. Pertanto, la frequenza di transizione ON→OFF è data dal reciproco del tempo di permanenza T_{ON} nello stato ON, ovvero $\alpha = 1/T_{ON}$ (in altre parole, per assunzione di esponenzialità, il tempo di permanenza nello stato ON è una variabile casuale esponenziale negativa con funzione di distribuzione $1-e^{-\alpha t}$). Analogamente, sia $\beta = 1/T_{OFF}$ la frequenza di transizione dallo stato OFF verso lo stato ON. La catena di Markov a due stati così ottenuta è illustrata nel diagramma di stato seguente.



Consideriamo l'evoluzione del processo a partire da un generico istante *t* fino ad un generico istante di tempo $t+\Delta t$ con Δt piccolo. Allora, considerando che, in un tempo Δt, transizioni di stato multiple hanno una probabilità che risulta essere un infinitesimo di ordine superiore rispetto alle transizioni singole, e considerando che, grazie all'assunzione di esponenzialità dei tempi di permanenza negli stati considerati, la probabilità di avere una transizione dallo stato ON ad OFF è data da $\alpha\Delta t$ e viceversa la probabilità di transizione da OFF ad ON è data da $\beta\Delta t$, possiamo scrivere:

$$P_{ON}(t+\Delta t) = P_{ON}(t)(1-\alpha\Delta t) + P_{OFF}(t)\cdot\beta\Delta t$$
$$P_{OFF}(t+\Delta t) = P_{ON}(t)\cdot\alpha\Delta t + P_{OFF}(t)(1-\beta\Delta t)$$

Riarrangiando i termini nelle equazioni e dividendo per Δt:

$$\frac{P_{ON}(t+\Delta t)-P_{ON}(t)}{\Delta t} = -\alpha \cdot P_{ON}(t) + \beta \cdot P_{OFF}(t)$$
$$\frac{P_{OFF}(t+\Delta t)-P_{OFF}(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot P_{ON}(t) - \beta \cdot P_{OFF}(t)$$

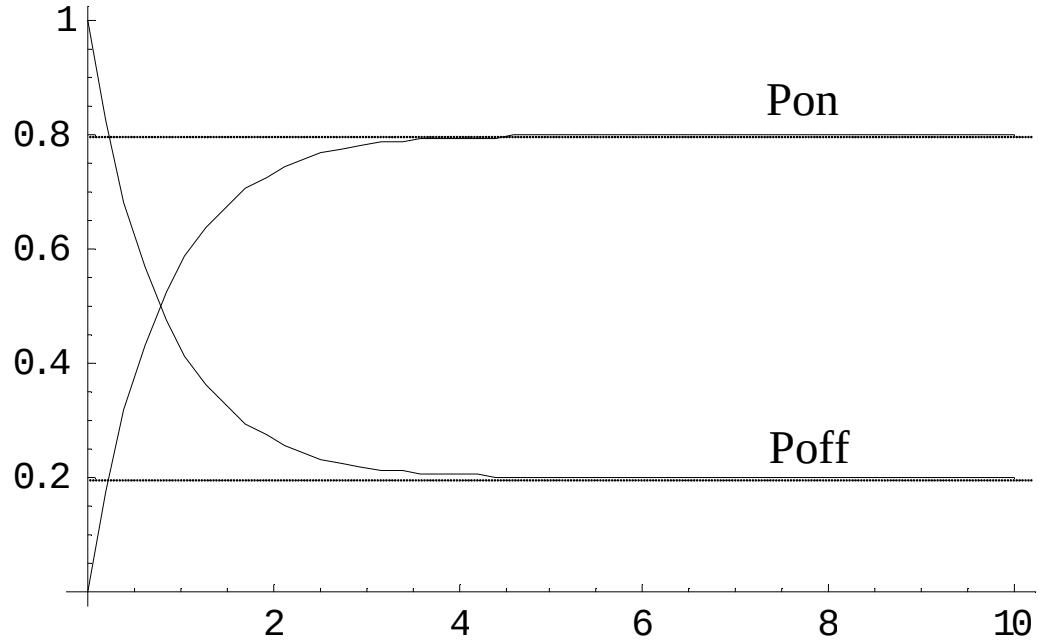
Passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$P'_{ON}(t) = -\alpha \cdot P_{ON}(t) + \beta \cdot P_{OFF}(t)$$
$$P'_{OFF}(t) = \alpha \cdot P_{ON}(t) - \beta \cdot P_{OFF}(t)$$

che rappresenta un sistema di equazioni differenziali lineari. Tali equazioni, nel caso generale di una catena di Markov arbitraria (ovvero non necessariamente limitata a due stati) prendono il nome di **equazioni di Chapman-Kolmogorov**. E' immediato verificare che, nell'assunzione in cui il sistema al tempo 0 si trovi nello stato OFF (ovvero $P_{ON}(0)=0, P_{OFF}(0)=1$), il sistema ha la seguente soluzione:

$$P_{ON}(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$
$$P_{OFF}(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

E' istruttivo rappresentare graficamente i risultati ottenuti. In particolare supponiamo di considerare un sistema in cui risulti T_{ON}=4s e T_{OFF}=1s. Pertanto, α=1/4 e β=1.



Gli andamenti delle probabilità di essere nello stato ON ed OFF at tempo *t* permettono di trarre alcuni interessanti considerazioni.

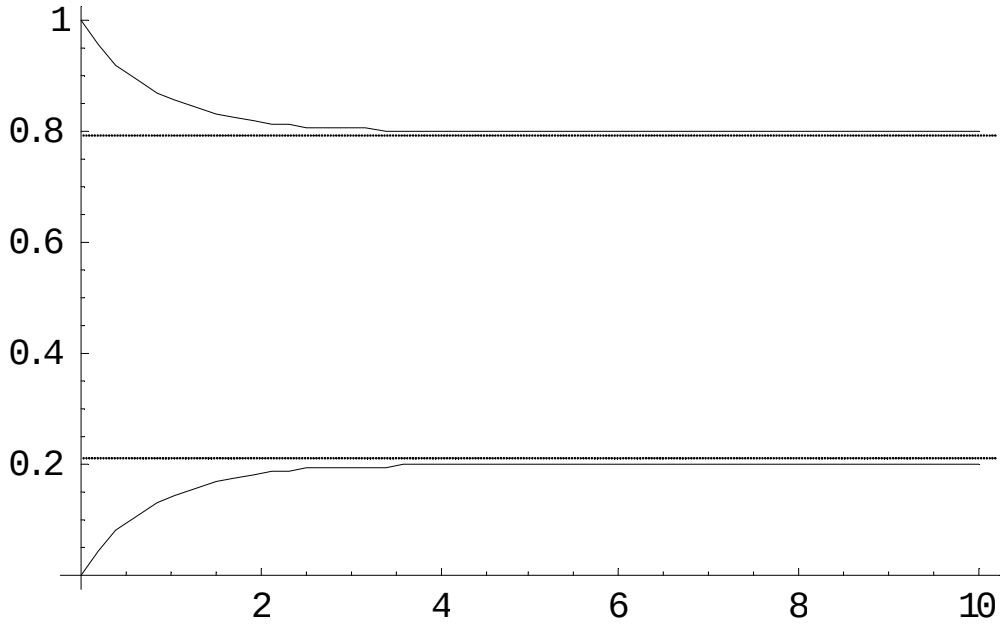
- Essendo partiti dall'assunzione di sistema inizialmente nello stato OFF, per *t* piccolo la probabilità $P_{ON}(t)$ risulta, come intuitivamente aspetato, essere piccola.
- Per t crescente fino a circa *t*=4, la probabilità $P_{ON}(t)$ cresce.
- Per *t* elevato (da 4 in poi), $P_{ON}(t)$ tende a convergere verso un asintoto orizzontale dato dal valore 0.8.

Proviamo a risolvere il sistema di equazioni differenziali, cambiando le condizioni iniziali, ed in particolare assumendo che il sistema inizialmente si trovi nello stato ON (ovvero $P_{ON}(0)=1, P_{OFF}(0)=0$). I risultati numerici sono, in questo caso:

$$P_{ON}(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$P_{OFF}(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}$$

ed il grafico risultante con i parametri numerici α=1/4 e β=1 è il seguente:



Dal confronto tra i due grafici, concludiamo che a prescindere dalle condizioni iniziali, il sistema evolve asintoticamente verso una distribuzione di probabilità fissata. Chiamiamo i valori asintotici: ***probabilità limite di stato****. Chiamiamo infine la distribuzione limite:* ***distribuzione stazionaria*** *(o* ***distribuzione a regime*** *o* ***distribuzione all'equilibrio****).*

III.2.1 Calcolo diretto della distribuzione stazionaria

Sebbene la risoluzione delle equazioni di Chapman-Kolmogorov permetta di ottenere l'evoluzione probabilistica del sistema al variare del tempo *t*, risulta evidente come, in gran

parte dei casi, sia sufficiente avere la sola distribuzione stazionaria. Per esempio, la probabilità di trovare il sistema occupato in un istante di tempo scelto casualmente è bene approssimata dalla probabilità asintotica di trovare il sistema nello stato ON[6].

Con riferimento al caso elementare di catena di Markov a due stati, il calcolo della distribuzione stazionaria sarebbe stato banale, partendo da considerazioni meramente intuitive. Infatti, essendo T_{ON}=4s e T_{OFF}=1s, la probabilità in un istante di ispezione casuale di trovare il sistema nello stato ON è di 4 volte quella di trovare il sistema nello stato OFF.

Ma supponiamo di non volerci avvalere di queste considerazioni intuitive. Possiamo notare che **il calcolo della distribuzione stazionaria comunque NON richiede la soluzione delle equazioni di Chapman-Kolmogorov, ma solo la loro formulazione!** Infatti, ricordiamo che nel caso in questione le equazioni di Chapman-Kolmogorov sono date da:

$$P'_{ON}(t) = -\alpha \cdot P_{ON}(t) + \beta \cdot P_{OFF}(t)$$
$$P'_{OFF}(t) = \alpha \cdot P_{ON}(t) - \beta \cdot P_{OFF}(t)$$

Sapendo che a regime (ovvero per $t \rightarrow$ infinito) le probabilità P_{ON} e P_{OFF} convergono a valori costanti, possiamo concludere che a regime le corrispondenti derivate tendono a 0. Pertanto, per il calcolo della distribuzione stazionaria, sarebbe bastato scrivere il seguente sistema di equazioni lineari (N.B: non più equazioni differenziali):

$$0 = -\alpha \cdot P_{ON}(\infty) + \beta \cdot P_{OFF}(\infty) \quad \Rightarrow \quad P_{ON}(\infty) = \frac{\beta}{\alpha} P_{OFF}(\infty)$$
$$0 = \alpha \cdot P_{ON}(\infty) - \beta \cdot P_{OFF}(\infty) \quad \Rightarrow \quad P_{ON}(\infty) = \frac{\beta}{\alpha} P_{OFF}(\infty)$$

Da cui si nota che le due equazioni sono linearmente dipendenti tra loro. Al fine di pervenire alla soluzione numerica, sarebbe bastato imporre, in luogo di una delle due equazioni, la condizione "di normalizzazione":

$$0 = -\alpha \cdot P_{ON}(\infty) + \beta \cdot P_{OFF}(\infty) \quad \Rightarrow \quad P_{ON}(\infty) = \frac{\beta}{\alpha} P_{OFF}(\infty)$$
$$P_{ON}(\infty) + P_{OFF}(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{ON}(\infty) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad , \quad P_{OFF}(\infty) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

III.2.2 Teorema di conservazione dei flussi di probabilità

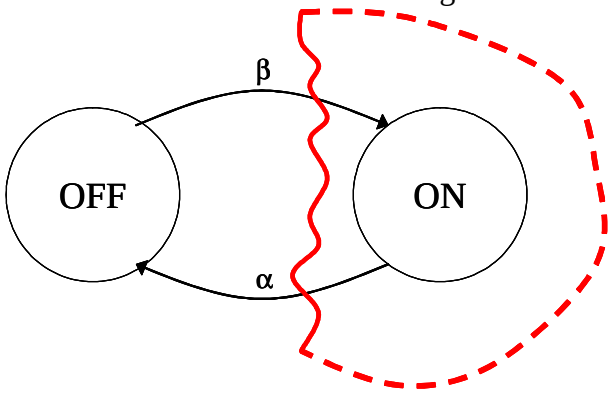
Chiarito che il calcolo della distribuzione stazionaria non richiede la soluzione esplicita delle equazioni di Chapman-Kolmogorov, ma la loro sola formulazione, in questa sezione

[6] Si noti che la conoscenza della distribuzione stazionaria non permetterebbe di rispondere a domande di questo tipo: "dato che al tempo 0 una chiamata in arrivo al sistema lo trova occupato, con che probabilità il sistema è ancora occupato al tempo t=1?". Tuttavia, quello che interessa nella pratica è la probabilità che una generica chiamata trovi il sistema occupato a prescindere dalla conoscenza di cosa è successo precedentemente, e questa coincide con la probabilità a regime di trovare il sistema nello stato ON.

enunciamo un teorema che permette di semplificare enormemente stesura del sistema di equazioni lineari la cui soluzione permette di calcolare la distribuzione stazionaria. Il teorema di conservazione dei flussi di probabilità si può enunciare come segue.

> *Chiamiamo **taglio** operato sull'insieme degli stati una suddivisione degli stati in due insiemi disgiunti e complementari. Per un sistema in equilibrio statistico (a regime), **la somma algebrica dei flussi di probabilità attraverso un qualunque taglio è nulla**.*

Nel caso elementare di catena di Markov a due stati trattata finora, è evidente che esiste un solo possibile taglio, illustrato nella figura seguente. Nella figura, al fine di sottolineare graficamente come un taglio "isoli" un insieme di stati rispetto agli altri stati, il taglio è stato illustrato come una linea chiusa. Che non sia possibile operare un secondo taglio è evidente: un'eventuale taglio "intorno" allo stato OFF (in luogo di quello disegnato "intorno" allo stato ON) avrebbe l'esito di suddividere l'insieme dei due stati negli stessi identici due sottinsiemi!



Per convenienza di notazione, chiamiamo π_{ON} e π_{OFF} le probabilità limite di stato, in luogo della precedente notazione $P_{ON}(\infty)$ e $P_{OFF}(\infty)$. Notiamo che:

- Il flusso entrante attraverso il taglio considerato è $\pi_{OFF} \cdot \beta$;
- Il flusso uscente attraverso il taglio considerato è $\pi_{ON} \cdot \alpha$;

Applicando il teorema enunciato precedentemente, possiamo pertanto scrivere la relazione:

$$0 = -\alpha \cdot \pi_{ON} + \beta \cdot \pi_{OFF} \qquad \Rightarrow \quad \pi_{ON} = \frac{\beta}{\alpha}\pi_{OFF}$$

Imponendo la condizione di normalizzazione (la somma delle probabilità π_x deve essere 1, altrimenti non avremmo una distribuzione di probabilità) otteniamo le probabilità limite di stato:

$$\pi_{ON} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

$$\pi_{OFF} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

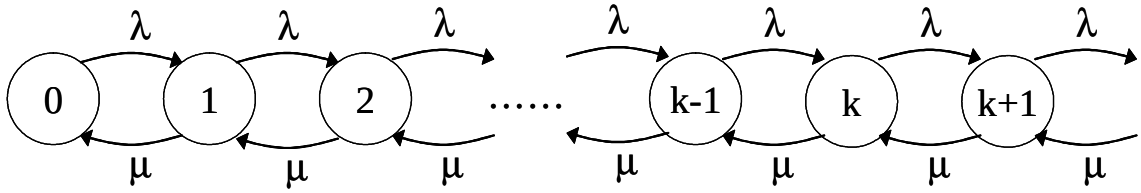
che, a parte la differente notazione, ovviamente coincidono con quelle calcolate nella sezione III.2.1.

III.3 Distribuzione stazionaria: caso M/M/1

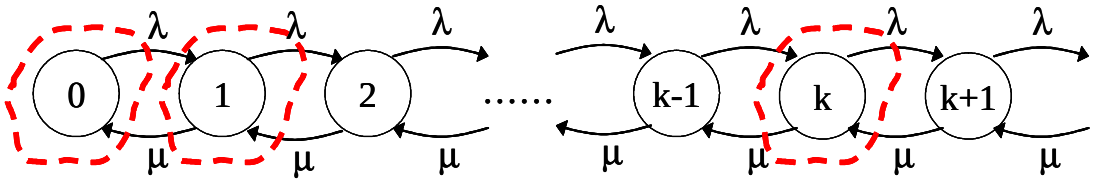
Riprendiamo il caso importante del sistema M/M/1. Nella sezione III.1.1 abbiamo verificato che il processo N(*t*) che rappresenta il numero di clienti in un sistema M/M/1 è una catena di Markov. Il processo N(*t*) è un processo di nascita e morte, in quanto prevede salti di al più una unità (partenze e/o arrivi singoli). Pertanto, le uniche frequenze di transizione di stato non nulle sono tra stati adiacenti. In particolare:

- Si ha una "nascita" in presenza di un arrivo di un utente al sistema. Visto che in un intervallo di tempo Δt si ha un arrivo con probabilità $\lambda \Delta t$, la frequenza di transizione da un generico stato k (k>=0) allo stato k+1 è λ.
- Si ha una "morte" quando un utente completa il servizio. Per qualunque stato k>0, In un intervallo di tempo Δt, ciò avviene con probabilità $\mu \Delta t$. Pertanto, la frequenza di transizione da un generico stato k (k>0) allo stato k-1 è μ. Si noti che non è possibile avere "morti" nello stato 0.

Ciò porta al diagramma di stato illustrato nella figura seguente.



Al fine di scrivere il sistema lineare risolutivo, si può procedere applicando il teorema di conservazione dei flussi a tagli effettuati intorno ad ogni singolo stato, come illustrato in figura:

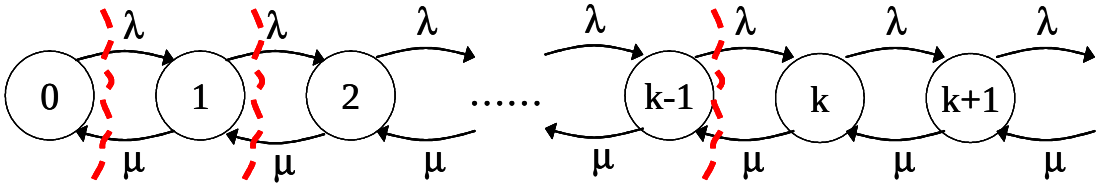


Dai tagli intorno agli stati 0, 1, …, k, si otterrebbe il sistema lineare ad infinite equazioni

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ \lambda\pi_0 + \mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1 \\ \dots \\ \lambda\pi_{k-1} + \mu\pi_{k+1} = (\lambda+\mu)\pi_k \\ \dots \end{cases}$$

Che può essere risolto ricorsivamente, esprimendo nella prima equazione π_1 in funzione di π_0, nella seconda equazione π_2 in funzione di π_0 (essendo π_1 oramai noto), etc.

Tuttavia è didatticamente istruttivo mostrare come una scelta più "furba" dei tagli permette di semplificare la stesura del sistema (ovviamente il risultato finale non cambia):



$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 & \Rightarrow \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\ \lambda\pi_1 = \mu\pi_2 & \Rightarrow \quad \pi_2 = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\ \ldots & \quad \ldots \\ \lambda\pi_{k-1} = \mu\pi_k & \Rightarrow \quad \pi_k = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_{k-1} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 \\ \ldots & \quad \ldots \end{cases}$$

Si noti che, al fine di completare il calcolo della distribuzione stazionaria, è necessario trovare π_0. Ciò è fatto imponendo la condizione di normalizzazione:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \pi_0 \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

dove la sommatoria converge solo se $\lambda/\mu<1$.

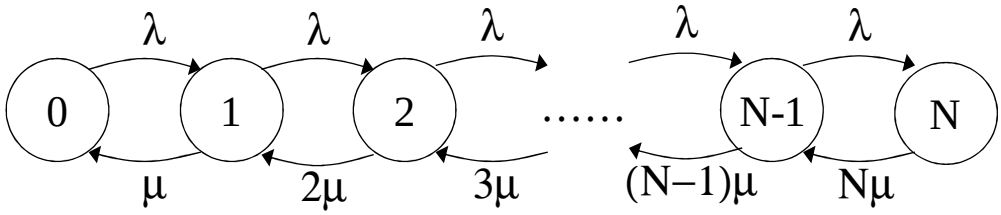
Riassumendo, detta $\rho = \lambda/\mu$ l'utilizzazione del sistema, la distribuzione stazionaria della catena considerata (ovvero la probabilità di trovare, a regime, *k* utenti nel sistema) è data da $\pi_k=(1-\rho)\rho^k$.

III.4 Distribuzione stazionaria: caso M/M/N/N

Siamo ora in grado di derivare formalmente la distribuzione stazionaria per il caso particolarmente importante di chiamate offerte ad un fascio di circuiti ed il suo caso speciale rappresentato dalla formula B di Erlang per il calcolo della relativa probabilità di blocco. Possiamo infatti modellare questo sistema come un sistema a coda composto da N circuiti (serventi) che operano in parallelo. Il numero di chiamate (utenti) che può essere ammesso al sistema considerato è al più uguale ad N. Diciamo che il sistema è a pura perdita, in quanto non può accomodare (in una eventuale fila di attesa) utenti in soprannumero rispetto al numero di serventi.

Consideriamo il processo stocastico N(*t*) che rappresenta il numero di circuiti (serventi) occupati al tempo *t*. E' banale dimostrare che tale processo stocastico è una catena di markov nell'assunzione di processo di arrivi markoviano (ovvero tempo di interarrivo tra chiamate distribuito esponenzialmente) e tempo di servizio esponenziale. Detto λ il tasso di arrivo delle

chiamate al sistema (chiamate/secondo), e detto 1/μ il tempo medio di servizio di una chiamata, possiamo rappresentare il sistema mediante il seguente diagramma di transizione di stato.



Il diagramma si può spiegare immediatamente come segue, studiando come caso particolare ciò che succede nello stato 2 e poi generalizzando. Il sistema è nello stato 2 quando due chiamate, diciamo la chiamata A e la chiamata B, sono attive e tutti gli altri circuiti sono liberi. In tale stato consideriamo un piccolo intervallo di tempo Δt. In tale intervallo, per assunzione di markovianità del processo degli arrivi e distribuzione esponenziale negativa del tempo di servizio possono indipendentemente avvenire i seguenti eventi con le seguenti probabilità:

$$P(\textit{arrivo in } \Delta t) = \lambda \Delta t$$
$$P(\textit{fine chiamata A in } \Delta t) = \mu \Delta t$$
$$P(\textit{fine chiamata B in } \Delta t) = \mu \Delta t$$

La frequenza di transizione dallo stato 2 allo stato 3 è quantificabile come il limite del rapporto tra la probabilità che nell'intervallo Δt considerato si abbia un arrivo e nessuna partenza (tutti gli eventi multipli sono trascurabili in quanto infinitesimi di ordine superiore a Δt) e l'intervallo stesso Δt, ovvero:

$$q(2 \to 3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t)(1 - \mu \Delta t)}{\Delta t} = \lambda$$

La frequenza di transizione dallo stato 2 allo stato 1 si può invece calcolare considerando che tale transizione avviene, trascurando gli eventi multipli, nel caso in cui o la chiamata A o la chiamata B terminano, ovvero:

$$q(2 \to 1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(1 - \lambda \Delta t)\mu \Delta t (1 - \mu \Delta t) + (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t)\mu \Delta t}{\Delta t} = 2\mu$$

Le altre probabilità di transizione (verso stati non adiacenti, ad esempio 2→0 o 2→4) sono nulle in quanto la probabilità di occorrenza di tali transizioni in Δt risulta essere $o(\Delta t)$.

Una volta giustificato il diagramma sopra illustrato, la distribuzione stazionaria può essere immediatamente calcolata applicando il metodo del bilanciamento del flussi di probabilità, che porta a scrivere le seguenti equazioni:

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

$$\lambda\pi_1 = 2\mu\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\lambda\pi_{k-1} = k\mu\pi_k \quad \Rightarrow \quad \pi_k = \frac{\lambda}{k\mu}\pi_{k-1} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\lambda\pi_{N-1} = N\mu\pi_N \quad \Rightarrow \quad \pi_N = \frac{\lambda}{N\mu}\pi_{N-1} = \frac{1}{N!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\pi_0$$

Da cui concludiamo, una volta imposta la condizione di normalizzazione, e chiamato con $A=\lambda/\mu$ il rapporto tra tasso di arrivo e tasso di servizio,

$$\pi_k = \frac{A^k}{k!}\pi_0 = \frac{A^k/k!}{\sum_{i=0}^{N} A^i/i!}$$

Pertanto ritrovando, per il caso particolare di probabilità di blocco π_N la formula B di Erlang[7] a suo tempo data.

IV Prestazioni di un sistema a coda

Quando, per un processo stocastico che descrive un sistema a coda, riusciamo a calcolare la distribuzione stazionaria, ci ritroviamo ad avere informazioni di dettaglio sul comportamento a regime del sistema.

IV.1 Prestazioni di un sistema M/M/1

Per esempio, la conoscenza della distribuzione stazionaria di una coda M/M/1, ovvero $\pi_k=(1-\rho)\rho^k$, ci permette di rispondere a domande molto dettagliate, del tipo:

- per quale percentuale di tempo il sistema risulta essere vuoto?
  - risposta: $\pi_0=(1-\rho)$
- con che probabilità un utente che arriva nel sistema trova davanti a se esattamente 2 o 3 clienti?
  - risposta: $\pi_2+\pi_3=(1-\rho)\rho^2+(1-\rho)\rho^3$

[7] Si noti che nella derivazione qui proposta, è stata fatta l'assunzione di tempi di servizio distribuiti esponenzialmente. In realtà è possibile dimostrare (ma la dimostrazione è decisamente più complessa e ben oltre gli obiettivi di queste dispense) che la formula B di Erlang è valida anche nel caso in cui le chiamate hanno distribuzione di tipo generale, ovvero anche per sistemi M/G/N/N. Tale proprietà è chiamata "insensitività" della probabilità di blocco alla distribuzione del tempo di servizio. In pratica, la probabilità di blocco in un sistema a pura perdita NON dipende dalla distribuzione statistica della durata delle chiamate, ma dipende SOLO dal suo valor medio.

- Con che probabilità un utente trova davanti a se più di 10 clienti?
  - risposta: $1-\sum_{i=0}^{10}(1-\rho)\rho^i = \rho^{11}$

Tipicamente, un tale livello di dettaglio non è sempre necessario; spesso è sufficiente avere degli indicatori di prestazione più generali. Tra questi, è di particolare interesse la conoscenza del livello medio di occupazione della coda. Questo indicatore prestazionale è immediatamente calcolato come segue:

$$E[N] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (1-\rho)\rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

D'altro canto, la conoscenza della distribuzione statistica relativa al numero di utenti in coda (e/o del suo valor medio) non è immediatamente rappresentativa delle prestazioni del sistema; per esempio, l'informazione essenziale ai fini di un dimensionamento di un sistema a coda è molto spesso legata al ritardo che un utente incontra nell'attraversamento del sistema, ma la distribuzione stazionaria non si riferisce a parametri temporali bensì al numero di utenti.

Nel caso particolare del sistema M/M/1, è, almeno a livello concettuale, relativamente semplice quantificare le prestazioni di ritardo. Infatti, un utente che arriva al sistema troverà con probabilità $\pi_k=(1-\rho)\rho^k$ un numero *k* di utenti davanti a lui. La distribuzione del tempo di attesa condizionatamente al fatto che l'utente trova *k* utenti è data dalla somma di *k*+1 variabili casuali esponenziali negative con stesso tasso μ (ovvero i *k* utenti davanti a lui più il suo tempo di servizio). Si noti che questo risultato vale solo ed esclusivamente perche' l'utente attualmente in servizio ha un tempo di vita residuo distribuito esponenzialmente, grazie alla proprietà di assenza di memoria della distribuzione del tempo di servizio. In pratica, il calcolo non e' elementare[8] (la distribuzione della somma di variabili casuali è data infatti dalla convoluzione tra le distribuzioni delle singole v.c.), pertanto si fornisce solo il risultato finale: detta T la distribuzione del tempo di attraversamento del sistema, T è una distribuzione esponenziale (risultato non intuitivo!), data da:

$$F_T(t) = P\{T \le t\} = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t} = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$$

Da cui è immediato derivare il valor medio

$$E[T] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

[8] Il modo più rapido per ottenere il risultato cercato è usare le trasformate di Laplace. Per una distribuzione esponenziale negativa X con tasso μ, la trasformata di Laplace è $L_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\mu e^{-\mu x}dx = \frac{\mu}{\mu+s}$. Poiche' la trasformata di una convoluzione è data dal prodotto delle trasformate, detta T la distribuzione del ritardo di attraversamento nel sistema, questa è data, in forma trasformata, da (si noti la sommatoria pesata su tutti i possibili k, per passare da distribuzione condizionata a distribuzione assoluta)

$$L_T(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{k+1}(1-\rho)\rho^k = \frac{\mu(1-\rho)}{s+\mu(1-\rho)}$$

La cui anti trasformata è una distribuzione esponenziale con tasso μ(1-ρ).

Si noti peraltro che la derivazione del solo ritardo medio poteva anche essere fatta senza passare dal calcolo della distribuzione del ritardo. Infatti, un utente che trova davanti a se k clienti, dovrà aspettare in media un tempo pari a k/μ per poter entrare in servizio, ed a questo punto sarà a sua volta servito in un tempo medio pari a 1/μ. Decondizionando su tutti i possibili valori di k:

$$E[T] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+1}{\mu}(1-\rho)\rho^i = \frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\rho}{(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

O, ancora più semplicemente, notando (la prova formale è il penultimo passaggio dell'espressione precedente) che un utente troverà mediamente davanti a se ρ/(1-ρ) utenti; ciascuno di questi richiederà un tempo medio di servizio pari a 1/μ; infine a questo tempo di attesa sarà da aggiungere il tempo medio di servizio del cliente stesso, 1/μ.

IV.1.1 Esempio

Si supponga di avere una linea di trasmissione avente capacità 200 kbps. A questa linea arrivano pacchetti la cui lunghezza è distribuita esponenzialmente con valor medio 625 bytes. I pacchetti arrivano ad una frequenza di 32 pacchetti/secondo, ed il processo degli arrivi è markoviano (tempo di interarrivo tra pacchetti distribuito esponenzialmente). Si calcoli:

1) Il numero medio di utenti nel sistema assumendo una fila di attesa di lunghezza infinita;
2) La probabilità che un pacchetto in arrivo sia immediatamente trasmesso, senza bisogno di essere preliminarmente accodato;
3) La probabilità che un pacchetto trovi davanti a se 5 o più altri pacchetti compreso quello attualmente in fase di trasmissione
4) Il ritardo medio
5) Il 95° percentile del ritardo

Grazie alle assunzioni fornite, il sistema è modellabile come una coda M/M/1. Il tasso di arrivo dei clienti (pacchetti) al sistema è λ=32; il tasso di servizio è l'inverso del tempo medio di servizio, ovvero μ=1/(625*8/200000) = 40. Il fattore di utilizzo del sistema, ovvero il rapporto ρ= λ/μ è pertanto 0.8. Con tali dati, è possibile rispondere alle domande come segue:

1) $E[N] = \frac{\rho}{(1-\rho)} = 4$
2) Per definizione questa è la probabilità π_0=(1- ρ) che un pacchetto in arrivo trovi il sistema vuoto; dai valori numerici si ottiene π_0=0.2
3) Come visto nella sezione precedente, la probabilità che un cliente trovi davanti a se 5 o più altri clienti è data da $\rho^6 = 0.262$
4) Il ritardo medio è E[W]=1/(μ-λ)=0.125s

5) Il 95° percentile del ritardo è definito come la soglia temporale sotto cui il 95% dei clienti sarà servita. Per calcolare tale percentile, è necessario partire dalla distribuzione del ritardo, e risolvere l'equazione

$$P\{T \le t\} = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t} = 0.95 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln(1-0.95)}{\mu-\lambda} = 708ms$$

IV.2 Risultato di Little

Il caso precedente era decisamente semplificato dall'assunzione di markovianità del tempo di servizio. Per esempio, se assumiamo un tempo di servizio non esponenziale, notiamo che un cliente che arriva al sistema dovrà aspettare il tempo di servizio dei clienti nella fila di attesa (come prima) più il **tempo di vita residua** del cliente attualmente in servizio; essendo quest'ultimo tempo in genere diverso dal tempo di servizio del cliente nella sua interezza (v. discussione nella sezione paradosso vita residua), il calcolo sia della distribuzione del ritardo che del suo valor medio non è in generale banale come nel caso M/M/1 trattato nella sezione precedente.

Tuttavia, per quanto riguarda il calcolo del ritardo medio, esiste un risultato estremamente generale, noto con il nome di **Little's Result**, che permette di ottenere tale ritardo medio una volta noto il numero medio di utenti nel sistema. In particolare:

> ***Little's Result: il numero medio di clienti E[N] in un sistema è uguale al tasso medio di ingresso[9] λ dei clienti nel sistema moltiplicato per il tempo medio E[T] speso da ogni cliente nel sistema. In formule:***
>
> $$E[N] = \lambda E[T]$$

Che ci sia una relazione tra numero medio di utenti in un sistema e ritardo medio è intuitivo: ci si può infatti aspettare che, in presenza di un grande numero di utenti in coda, anche il ritardo sia grande. E' forse meno immediato comprendere perche' la costante di proporzionalità tra E[N] ed E[T] sia proprio λ, ma forniremo una spiegazione intuitiva nella prossima sezione IV.2.2. Invece, la cosa sorprendente è che tale risultato vale in condizioni estremamente generali! In particolare, non dipende ne' dal processo di arrivo degli utenti nel sistema, né dalla distribuzione del tempo di servizio. Inoltre, non dipende neanche dalla disciplina di servizio, ovvero vale per qualunque disciplina scelta (First-In-First-Out, Random, Last-In-First-Out, Processor Sharing, etc). Infine, e forse è questa la cosa più sorprendente, non dipende dalla struttura del sistema stesso, ovvero vale per code singole, per reti di code, per "parti" di un sistema, e così via!

[9] Si faccia estrema attenzione alla terminologia adottata: per λ non intendiamo il tasso di ARRIVO degli utenti al sistema (traffico offerto), bensì il traffico ACCETTATO (smaltito) dal sistema, traffico che, in sistemi a perdita, è ovviamente differente dal traffico offerto.

IV.2.1 Risultato di Little: esempi

Per cominciare, ritroviamo il ritardo medio precedentemente calcolato nel caso di coda M/M/1 tramite il risultato di Little:

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\lambda} = \frac{1}{(1-\rho)\cdot\mu} = \frac{1}{(\mu-\lambda)}$$

Ora, nella precedente trattazione della coda M/M/1 non abbiamo esplicitamente derivato il numero medio di clienti nella sola fila di attesa, ovvero escludendo gli utenti mediamente in servizio. Tale risultato può essere istruttivamente derivato a partire da Little, applicato stavolta ***al solo sottosistema rappresentato dalla fila di attesa con l'esclusione del servente***. Infatti, il tempo di attesa per un generico utente è ovviamente dato dal tempo medio di attesa nell'intero sistema M/M/1 meno il tempo di servizio medio dell'utente stesso, ovvero:

$$E[W] = E[T] - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(1-\rho)\cdot\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu}$$

Applicando Little deduciamo che il numero di clienti mediamente in attesa è dato da

$$E[Q] = E[W]\cdot\lambda = \frac{\rho}{(1-\rho)\cdot\mu}\cdot\lambda = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Come prova, si noti che tale risultato è dato dal numero medio di clienti nel sistema, ovvero ρ /(1- ρ), meno il numero medio di clienti in servizio, per definizione uguale al fattore di utilizzo ρ della coda, riottenendo pertanto,

$$E[Q] = \frac{\rho}{(1-\rho)} - \rho = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Come sopra accennato, Little vale a prescindere dalla struttura del sistema considerato. Un esempio eclatante è il seguente. Supponiamo che mediamente ci siano 100.000.000 di utenti connessi ad internet, supponiamo che mediamente ogni utente riceva un flusso di pacchetti pari a 20 pacchetti/secondo, e supponiamo che il ritardo medio dei pacchetti sia di 300 ms. Ebbene, Little ci permette di rispondere in modo elementare alla domanda apparentemente complessa: quanti pacchetti sono mediamente in circolo in un dato istante di tempo nell'intera rete mondiale Internet? Basta infatti applicare la formula:

$$E[N] = \lambda\cdot E[T] = (100.000.000\times 20\ p/s)\cdot 0{,}3\ s = 600.000.000\ p\,!$$

Infine, come ultimo esempio, applichiamo Little al caso di sistemi M/M/N/N a pura perdita. In tali sistemi, non è prevista fila di attesa ed un utente viene servito solo se esiste un servente libero; altrimenti l'utente è scartato (traffico perduto). Assumendo che il tempo medio di servizio di una chiamata sia 1/μ, il numero medio di utenti in servizio è dato da

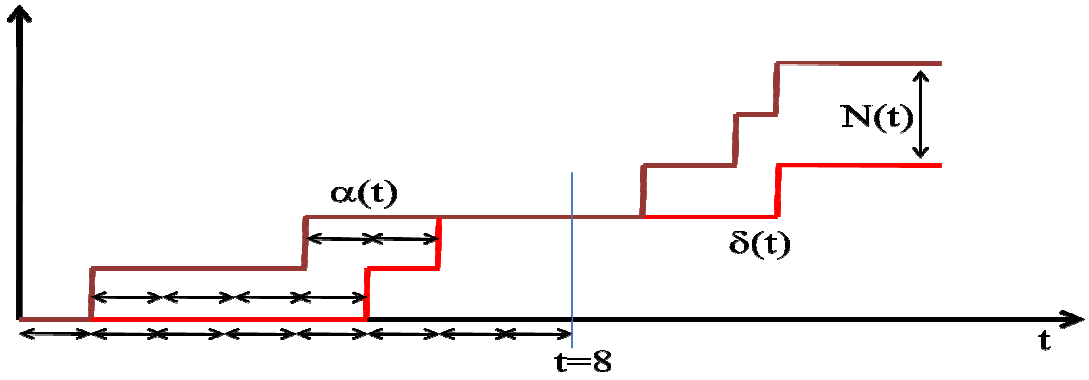
$$E[circuiti\ occupati] = \lambda_{accettato}\cdot\frac{1}{\mu} = \lambda_{offerto}(1-P_{blocco})\cdot\frac{1}{\mu} = A_0(1-P_{blocco}) = A_s$$

Ritrovando così le formule a suo tempo fornite per tale sistema a pura perdita.

IV.2.2 Risultato di Little: giustificazione

Sebbene una dimostrazione formale/rigorosa del risultato di Little non sia negli obiettivi delle presenti dispense, riteniamo che un risultato così importante e generale meriti per lo meno una giustificazione intuitiva.

La seguente figura mostra un esempio di arrivi e partenze ad un sistema a coda. In particolare, a partire da un sistema inizialmente vuoto al tempo t=0, la figura riporta sia il numero α(t) di utenti arrivati al sistema nell'intero intervallo di tempo (0,t), sia il numero δ(t) di utenti che hanno lasciato il sistema nel medesimo intervallo temporale. Ovviamente, sia α(t) che δ(t) sono processi casuali a stati discreti sempre crescenti all'aumentare del parametro t, ovvero all'aumentare dell'intervallo temporale su cui il conteggio degli arrivi e delle partenze è effettuato. In un dato istante di tempo, il numero N(t) di utenti attualmente "dentro" il sistema è immediatamente dato dalla differenza α(t)-δ(t).



Chiamiamo ora γ(t) l'area contenuta tra le due curve α(t) e δ(t). Il valore γ(t) rappresenta, al tempo t, il tempo totale speso dagli utenti entrati nel sistema prima del tempo t considerato. Si noti che γ(t), essendo un integrale, è misurato in tempo x utenti. Con riferimento all'esempio illustrato in figura, al tempo t=8 secondi otterremmo γ(8) = 6 utenti x secondi. Si noti altresì che

1) il rapporto $\overline{N}_t = \gamma(t)/t$ rappresenta il numero medio di utenti nel sistema misurato durante l'intervallo di tempo (0,t); con riferimento all'esempio della figura, al tempo t=8 otterremmo γ(8)/8=3/4, che e' il risultato corretto in quanto per 3 secondi su 8 (secondi # 1, 7 ed 8) il sistema è vuoto; per 4 secondi (secondi #2,3,4 e 6) il sistema contiene un solo utente, e per un secondo (il # 6) il sistema contiene 2 utenti, pertanto in media (0x3+1x4+2x1)/8.
2) il rapporto $T_t = \gamma(t)/\alpha(t)$ rappresenta il tempo medio speso da ogni utente nel sistema; con riferimento all'esempio in figura, considerando due utenti in cui il primo arrivato è rimasto nel sistema per 4 secondi, ed il secondo per 2 secondi, il rapporto γ(8)/α(8) =6/2=3 darebbe per l'appunto il tempo medio ricercato ovvero 3 secondi per utente;
3) Infine, il rapporto $\lambda_t = \alpha(t)/t$ rappresenta il traffico medio (in utenti al secondo) di utenti entrati nel sistema nell'intervallo temporale considerato; dall'esempio

troveremmo che α(8)/8=1/4 darebbe la frequenza di un utente in ingresso ogni 4 secondi.

Le tre grandezze sopra esemplificate sono ovviamente legate dalla seguente equazione:

$$\frac{\gamma(t)}{t} = \frac{\alpha(t)}{t} \cdot \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} \quad \Rightarrow \overline{N}_t = \lambda_t T_t$$

Poiche' tale equazione è valida per ogni tempo t considerato, ci aspettiamo che valga anche per t tendente ad infinito, da cui consegue il risultato di Little (alle grandezze funzione di t potremmo infatti sostituire i corrispondenti valori medi)!