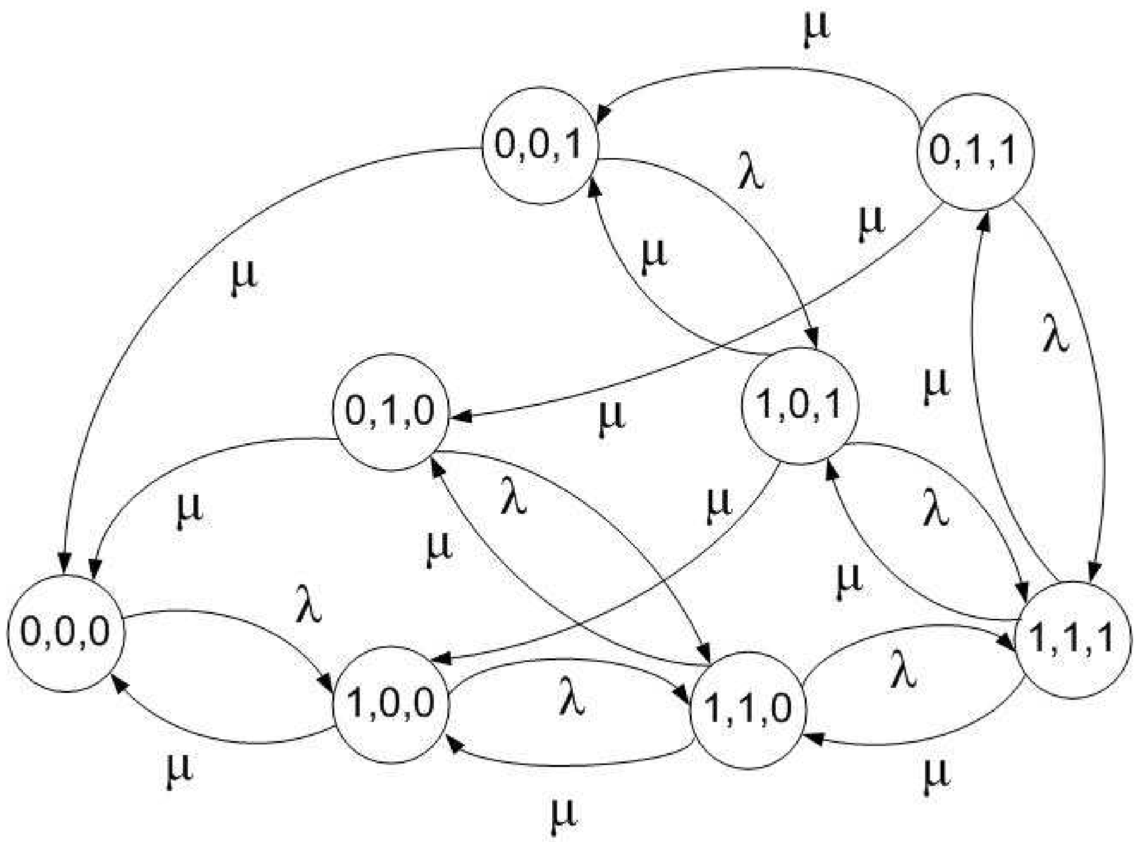
Esercizio n°1

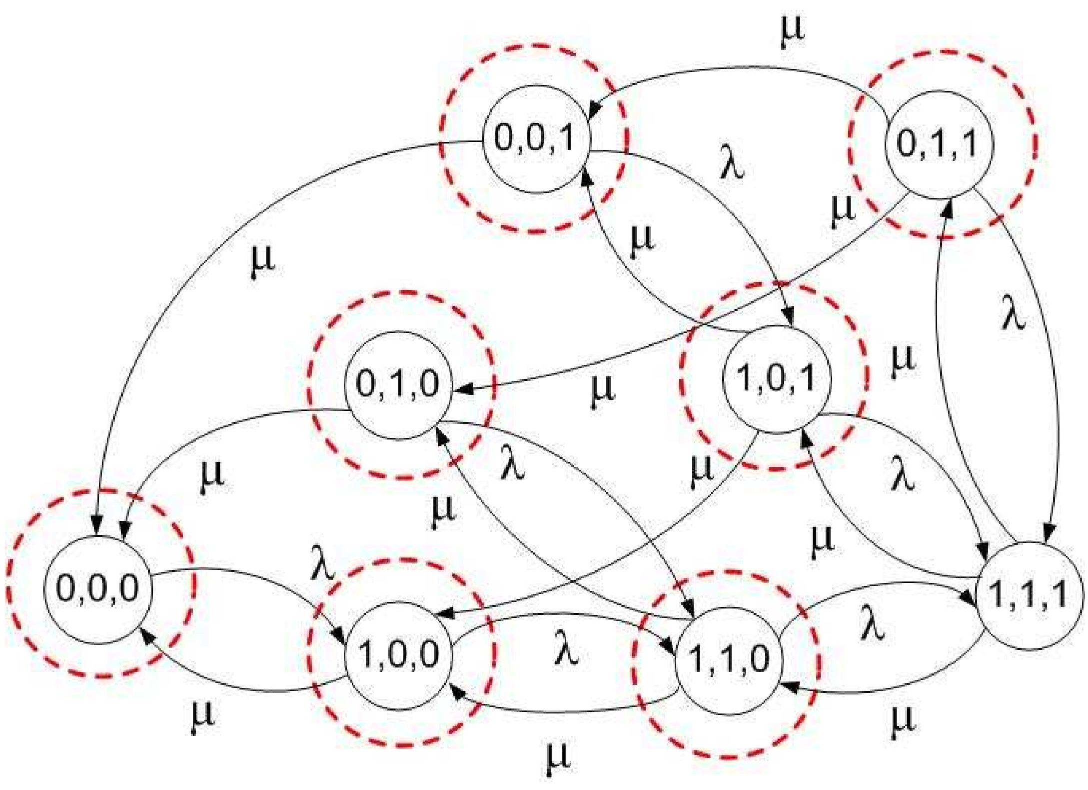
Si consideri un sistema di servizio con coda di capacità nulla e tre serventi S_A, S_B, S_C. Al sistema arrivano richieste di servizio markoviane (infiniti utenti e tempo di interarrivo distribuito secondo un'esponenziale negativa e valore medio $\frac{1}{\lambda}$). I tre serventi sono caratterizzati da un medesimo tempo di servizio distribuito secondo un'esponenziale negativa con valore medio $\frac{1}{\mu}$. Il sistema adotta la seguente disciplina di servizio. Quando una richiesta giunge al sistema, essa non viene servita da un servente libero scelto a caso, ma viene servita dal servente libero con indice inferiore, ovvero secondo l'ordine $S_A -> S_B -> S_C$. Una volta in servizio, la richiesta rimane nel servente considerato fino a completamento del servizio stesso. Si chiede di

1) determinare il diagramma di transizione degli stati, in modo tale da essere in grado di rispondere successivamente alla domanda 3.
2) impostare (senza risolverlo) il sistema di equazioni che consente di determinare le probabilità stazionarie associate ai vari stati;
3) valutare la probabilità che il servente S_A sia occupato;
4) determinare il traffico smaltito dal sistema.
5) determinare la probabilità di blocco [facoltativo: arrivando al risultato finale nel caso di $\lambda = 2$ richieste/sec e $\mu = 4$ richieste/sec]

1) Se non ci fosse stata la domanda 3, sarebbe stato sufficiente assumere come stato il numero di utenti nel sistema N(t), che è una catena di Markov anche con questa specifica disciplina di servizio. Pertanto la distribuzione del numero di utenti nel sistema sarebbe stata quella di Erlang (si ricorda che vi sono 0 posti in coda) e la probabilità di blocco sarebbe stata calcolabile con la formula B di Erlang. Tuttavia, la domanda 3 introduce una complicazione, in quanto il fatto di sapere che all'interno del sistema vi sono 1,2,o 3 utenti non consente di dedurre se il servente S_A è occupato proprio a causa della specifica disciplina di servizio che caratterizza il sistema (diverso sarebbe stato se il servente fosse scelto a caso tra quelli liberi). Per rispondere alla domanda 3, occorre fare riferimento ad uno stato che tenga conto dello stato di occupazione di ognuno dei tre serventi. In questo modo, il generico stato del sistema sarà rappresentato dalla tripletta (i, j, k) con i, j, k che rappresentano lo stato dei serventi rispettivamente S_A, S_B e S_C e che assumono i valori 1 o 0 a secondo che il corrispondente servente sia occupato o meno. Adottando la suddetta convenzione, il diagramma di transizione degli stati risulta



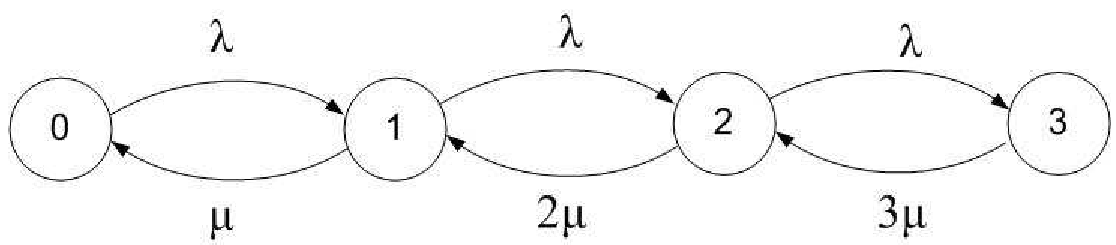
2) Per impostare il sistema che consente di determinare le probabilità stazionarie associate ai diversi stati, si operano i 7 tagli riportati nella figura sottostante



Il relativo sistema di equazioni è

$$
\begin{cases}
\lambda\pi_{0,0,0} = \mu\pi_{0,0,1} + \mu\pi_{0,1,0} + \mu\pi_{1,0,0} \\
(\lambda+\mu)\pi_{1,0,0} = \lambda\pi_{0,0,0} + \mu\pi_{1,1,0} + \mu\pi_{1,0,1} \\
(\lambda+\mu)\pi_{0,1,0} = \mu\pi_{1,1,0} + \mu\pi_{0,1,1} \\
(\lambda+\mu)\pi_{0,0,1} = \mu\pi_{1,1,0} + \mu\pi_{1,0,1} \\
(\lambda+2\mu)\pi_{1,1,0} = \lambda\pi_{0,1,0} + \lambda\pi_{1,0,0} + \mu\pi_{1,1,1} \\
(\lambda+2\mu)\pi_{1,0,1} = \lambda\pi_{0,0,1} + \mu\pi_{1,1,1} \\
(\lambda+\mu+\mu)\pi_{0,1,1} = \mu\pi_{1,1,1} \\
\pi_{0,0,0} + \pi_{1,0,0} + \pi_{0,1,0} + \pi_{0,0,1} + \pi_{1,1,0} + \pi_{1,0,1} + \pi_{0,1,1} + \pi_{1,1,1} = 1
\end{cases}
$$

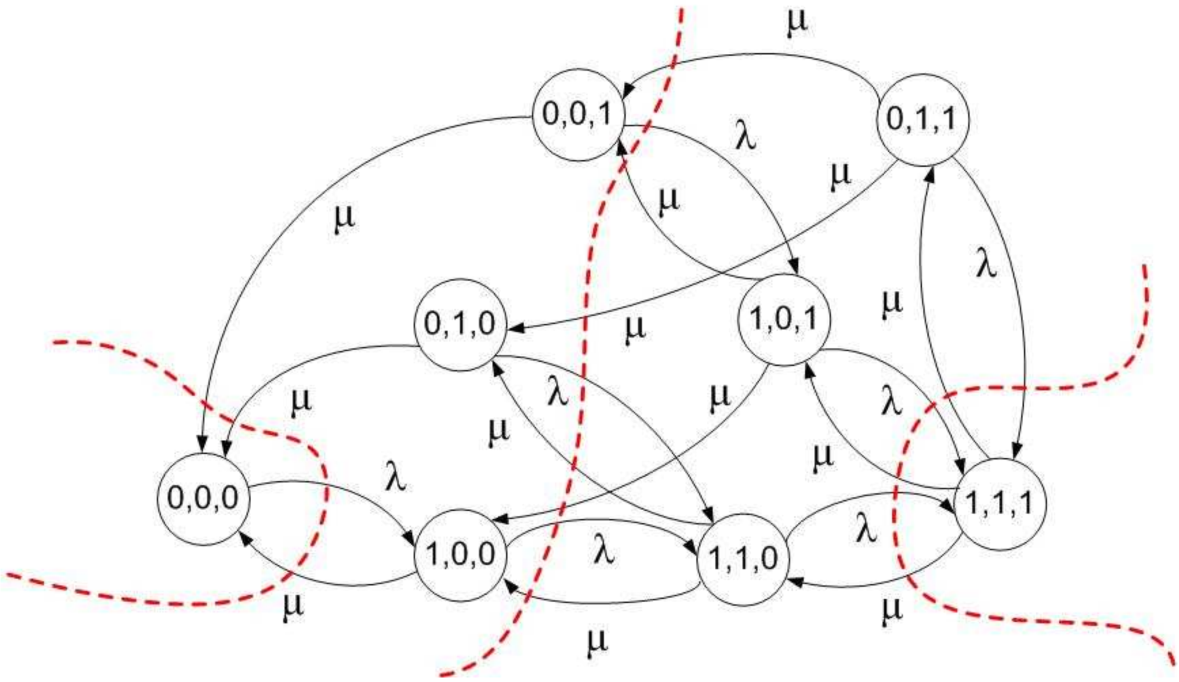
Vorrei fare notare come dalla precedente catena avrebbero potuto essere dedotte equazioni che caratterizzano la catena di Markov che si sarebbe ottenuta assumendo come stato il solo numero di utenti all'interno del sistema. In particolare il diagramma di transizione di stato di quest'ultima è



e il sistema di equazioni che consente di calcolare le probabilità limite di stato è

$$
\begin{cases}
\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\
\lambda\pi_1 = 2\mu\pi_2 \\
\lambda\pi_2 = 3\mu\pi_3 \\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1
\end{cases}
$$

Le prime tre equazioni avrebbero potuto essere ottenute operando nel primo diagramma di transizione i tre tagli riportati in figura



Infatti, considerato il solo primo taglio, si avrebbe

$$\lambda\pi_{0,0,0} = \mu\pi_{1,0,0} + \mu\pi_{0,1,0} + \mu\pi_{0,0,1}$$
$$\Rightarrow \lambda\pi_{0,0,0} = \mu(\pi_{1,0,0} + \pi_{0,1,0} + \pi_{0,0,1})$$

Ma a questo punto si può osservare che

$$\pi_{0,0,0} = \pi_0, \pi_{1,0,0} + \pi_{0,1,0} + \pi_{0,0,1} = \pi_1$$

In altri termini l'aggregazione degli stati $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ porta esattamente allo stato 1. Pertanto l'equazione scritta è del tutto equivalente alla prima equazione del sistema relativo alla catena di Markov associata al solo numero di utenti nel sistema.
In maniera analoga si procederebbe con gli altri due tagli.

3) La probabilità che il servente S_A sia occupato è data da

$$P_{occ,S_A} = \pi_{1,0,0} + \pi_{1,1,0} + \pi_{1,0,1} + \pi_{1,1,1}$$

4) Il traffico smaltito dal sistema è

$$A_s = \pi_{1,0,0} + \pi_{0,1,0} + \pi_{0,0,1} + 2(\pi_{1,1,0} + \pi_{1,0,1} + \pi_{0,1,1}) + 3\pi_{1,1,1}$$

5) La risposta segue banalmente applicando la formula B di Erlang. Infatti per dare una risposta a questa domanda è sufficiente modellare il sistema tenendo in considerazione solo il numero di clienti nel sistema e non gli specifici serventi da cui i clienti vengono serviti. Di conseguenza

$$P_{blocco} = \pi_3 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{1}{3!}}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{1}{2!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{1}{3!}} = \frac{\frac{1}{48}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{48}} = \frac{1}{85} = 1.18\%$$

<u>Esercizio n°2</u>

Una cella di una rete GSM è caratterizzata in condizioni normali da una densità di traffico offerto e da una probabilità di blocco rispettivamente pari a 23 Erl/km^2 e 0.5%. Per far fronte all'aumento del traffico offerto che si verifica la notte di Capodanno, il gestore della cella acquista 3 frequenze in più (si ricorda che ogni frequenza puo' servire fino ad 8 conversazioni). Determinare di quanto può aumentare il traffico offerto offerto se si vuole mantenere la probabilità di blocco allo 0.5%. Si assuma la cella di forma circolare e raggio pari ad 800 m.

Il traffico offerto in condizioni normali risulta pari a

$$A_o = \delta \cdot S$$

dove δ rappresenta la densità di traffico offerto e S la superficie della cella.

$$\delta = 23 Erl / km^2$$
$$\Rightarrow S = \pi R^2 = 3.14 \cdot (0.8)^2 = 2.0096 km^2$$
$$A_o = 23 \cdot 2.0096 = 46.2208 \text{Erl}$$

Al precedente valore di A_o ed alla probabilità di blocco dello 0.5%, corrisponde un valore di conversazioni (che può essere letto dalla tabella Erlang B inversa) pari a 62. Poiché in una rete GSM una frequenza è in grado di servire fino a 8 conversazioni, si può affermare che in condizioni normali operano nella cella 8 frequenze.
In seguito all'acquisto delle tre frequenze, il numero di conversazioni che la cella è in grado di sostenere è 88. Se si vuole che la corrispondente probabilità di blocco rimanga costante al valore 0.5%, il traffico offerto non può superare il valore

$A_o^{'} = 69.9318$ Erl

Di conseguenza il massimo aumento che il traffico offerto potrà subire la notte di Capodanno è

$\Delta A_o = A_o^{'} - A_o = 69.9318 - 46.2208 = 23.711$ Erl.