Esercizio n°1

In un sistema di servizio con coda di capacità nulla e due serventi, arrivano richieste di due diversi tipi, fax e chiamate telefoniche. Le richieste di fax sono inoltrate da una sola linea e possono essere servite da un solo servente. Se una richiesta di fax giunge alla linea, mentre una richiesta di fax sta già venendo servita all'interno del sistema, la linea scarta la richiesta e non la inoltra al sistema. Alle richieste di fax è inoltre associata una frequenza media di arrivo pari ad α ed una frequenza media di servizio pari a β. Le richieste di chiamate telefoniche arrivano da più linee con una frequenza media complessiva pari a λ e vengono servite con un tasso medio pari a μ.

A. Determinare le probabilità di blocco relative alle richieste di fax e di chiamate telefoniche.

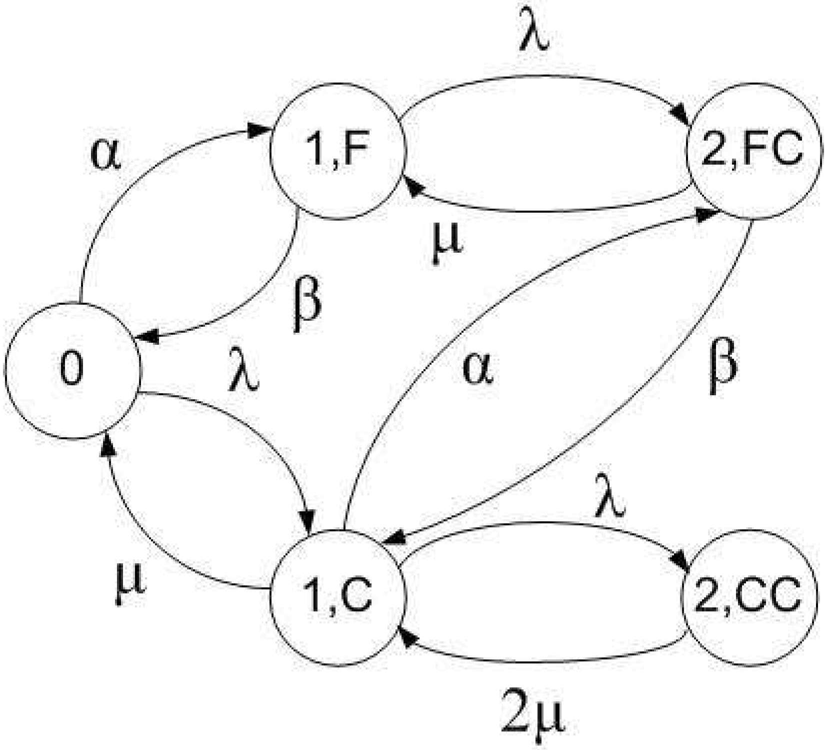
Occorre come prima cosa determinare il diagramma di transizione degli stati e quindi scegliere la modellizzazione più opportuna.

Si noti a tal proposito che il processo associato al numero di utenti complessivamente presenti nel sistema (variabile tra 0 e 2) non è una catena di Markov. Si ricorda che 2 sono le proprietà che contraddistinguono un processo di Markov:

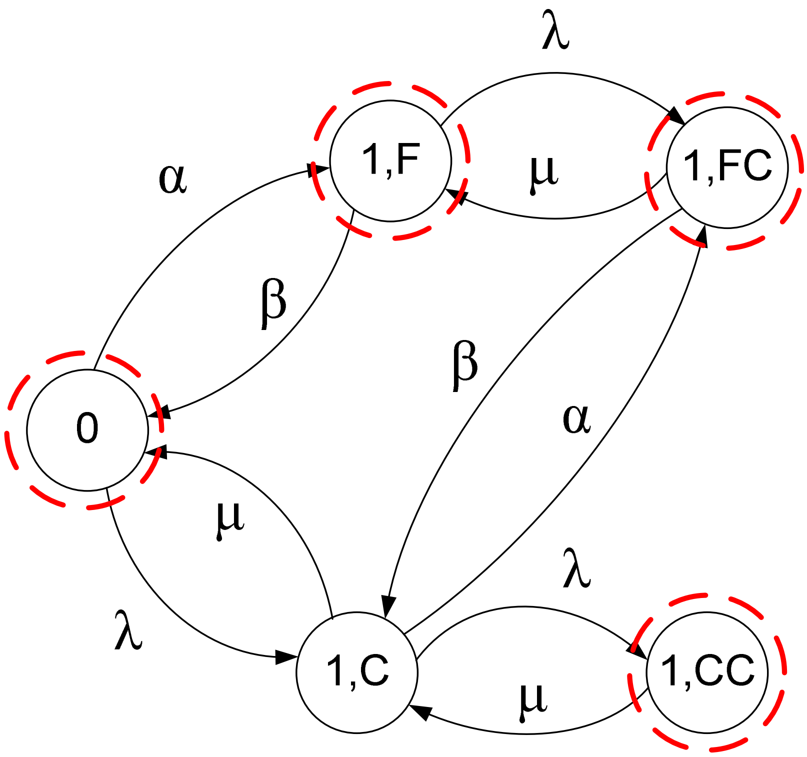
1) il tempo di permanenza in ogni stato è una variabile casuale con distribuzione esponenziale negativa;
2) le frequenze di transizione di stato dipendono solo dallo stato di partenza e non dagli stati visitati precedentemente.

Nel caso proposto, se si assume come stato il numero di utenti nel sistema, la proprietà 1 è sicuramente verificata, ma lo stesso non si può dire per la proprietà 2. Infatti, il fatto di sapere che un solo servente è occupato non consente di stabilire come si evolverà il sistema nel caso di fine servizio, visto che la frequenza di transizione 1->0 dipende dal tasso di servizio e questo è diverso a seconda che il cliente servito sia una richiesta fax o una richiesta telefonica. Inoltre, anche il fatto di sapere che entrambi i serventi sono occupati non consente di dire come si evolverà il sistema in caso di fine servizio, visto che la frequenza di transizione 2->1 dipende dal tasso di servizio e questo è diverso a seconda che il cliente servito sia una richiesta fax o una richiesta telefonica.

Se si assume invece come stato non solo il numero di utenti del sistema, ma anche il tipo di utenti (richieste fax e richieste telefoniche) all'interno del sistema, questo diventa modellizzabile in termini di una catena di Markov, visto che l'informazione fornita garantisce in questo caso che le proprietà 1 e 2 risultino soddisfatte. In particolare, il diagramma di transizione degli stati è il seguente:



Il sistema che consente di determinare le probabilità stazionarie associate ai diversi stati può essere determinato imponendo la condizione di normalizzazione ed operando ad esempio i 4 tagli riportati nella figura sottostante.



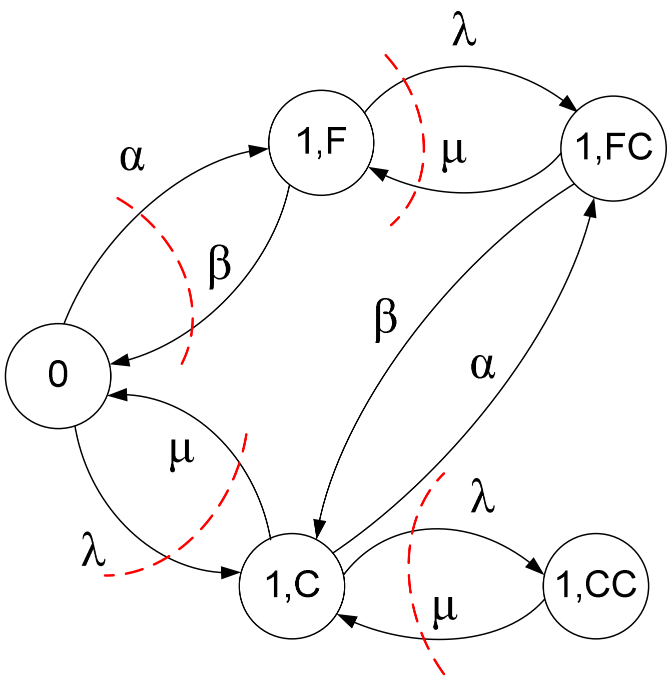
Esso risulta in particolare

$$\begin{cases} (\alpha+\lambda)\pi_0 = \beta\pi_{1,F} + \mu\pi_{1,C} \\ (\beta+\lambda)\pi_{1,F} = \alpha\pi_0 + \mu\pi_{2,FC} \\ (\mu+\beta)\pi_{2,FC} = \lambda\pi_{1,F} + \alpha\pi_{1,C} \\ \mu\pi_{2,CC} = \lambda\pi_{1,C} \\ \pi_0 + \pi_{1,F} + \pi_{1,C} + \pi_{2,FC} + \pi_{2,CC} = 1 \end{cases}$$

Risolvendo, si trova

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{2\beta\mu^2}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\ \pi_{1,F} = \dfrac{2\alpha\mu^2}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\ \pi_{1,C} = \dfrac{2\beta\lambda\mu}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\ \pi_{2,FC} = \dfrac{2\alpha\lambda\mu}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \\ \pi_{2,CC} = \dfrac{\beta\lambda^2}{\beta\lambda^2 + 2\alpha\lambda\mu + 2\beta\lambda\mu + 2\alpha\mu^2 + 2\beta\mu^2} \end{cases}$$

Si osservi che i tagli riportati in figura non rappresentano l’unica scelta possibile. La figura sottostante riporta un'altra “buona” possibile scelta. Quando si dice buona, si intende fare riferimento al fatto che i tagli sono finalizzati a ricavare quattro equazioni linearmente indipendenti (la quinta è fornita dalla condizione di normalizzazione) e bisogna quindi stare attenti a non operare tagli che conducano ad equazioni che siano combinazioni lineari di equazioni già presenti.



Con riferimento alla figura sovrastante, si sarebbe pervenuti al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha \cdot \pi_0 = \beta \pi_{1,F} \\ \lambda \pi_{1,F} = \mu \pi_{2,FC} \\ \lambda \cdot \pi_0 = \mu \pi_{1,C} \\ \mu \pi_{2,CC} = \lambda \pi_{1,C} \\ \pi_0 + \pi_{1,F} + \pi_{1,C} + \pi_{2,FC} + \pi_{2,CC} = 1 \end{cases}$$

Per determinare la probabilità di blocco relativa alla richiesta di fax, occorre ricordare che le richieste sono trasmesse al sistema solo se nessuno dei due serventi sta già servendo una richiesta di fax. In altri termini, il processo di arrivo delle richieste di fax dipende dallo stato del sistema. Di conseguenza, si ha perdita solo quando i due serventi stanno entrambi servendo una chiamata telefonica.

$$\Rightarrow P_{blocco,\,fax} = \pi_{2,CC}$$

Il processo di arrivo delle richieste di chiamate telefoniche non dipende invece dallo stato del sistema e si ha perdita quando entrambi i serventi sono occupati, a prescindere dal tipo di richiesta che sta venendo servita.

$$\Rightarrow P_{blocco,telefonata} = \pi_{2,FC} + \pi_{2,CC}$$

B. Determinare le frequenze medie con cui le richieste di fax e telefonate sono smaltite dal sistema.

Nel caso delle richieste di fax occorre tenere in conto il fatto che il processo degli arrivi dipende dallo stato del sistema. In conseguenza di ciò la frequenza media del traffico offerto non è α, ma sarà pari alla sola frazione di α che la linea inoltra al sistema,

$$\Rightarrow \lambda_{o,fax} = \alpha\left(\pi_0 + \pi_{1,C} + \pi_{2,CC}\right)$$

Di tale frequenza del traffico offerto la frazione perduta è

$$\lambda_{p,fax} = \lambda_{o,fax} \cdot \pi_{2,CC}$$

mentre la frazione smaltita è

$$\lambda_{s,fax} = \lambda_{o,fax}\left(\pi_0 + \pi_{1,C}\right)$$

Nel caso invece delle richieste di chiamate telefoniche, il processo degli arrivi non dipende dallo stato del sistema. In conseguenza di ciò, la frequenza media del traffico offerto è esattamente λ, e le frequenze medie del traffico perduto e smaltito sono

$$\lambda_{p,telefonata} = \lambda\left(\pi_{2,FC} + \pi_{2,CC}\right)$$
$$\lambda_{s,telefonata} = \lambda\left(1 - \pi_{2,FC} - \pi_{2,CC}\right)$$

Esercizio 2

Un multiplatore a pacchetto è caricato dal traffico emesso da 60 sorgenti. Ogni sorgente esibisce un comportamento periodico, nel senso che ad intervalli di durata media $T_1 = 1$ secondo, durante i quali la singola sorgente emette pacchetti con tempo di interarrivo distribuito esponenzialmente e valore medio pari a 40 msec, seguono intervalli di durata media $T_2 = 5$ secondi, durante i quali la singola sorgente emette pacchetti con tempo di interarrivo distribuito esponenzialmente e valore medio pari a 50 msec. Se la lunghezza dei pacchetti è distribuita esponenzialmente con valore medio 600 byte, determinare la capacità della linea d'uscita che consente di avere un tasso di utilizzazione del 90%.

Svolgimento

La frequenza con cui la singola sorgente emette pacchetti può assumere due valori diversi, a seconda che ci si trovi in un intervallo di tempo di tipo T_1 o in un intervallo di tempo di tipo T_2. Inoltre la probabilità che ci si trovi in un intervallo di tempo di tipo T_1 è pari a $\frac{T_1}{T_1+T_2}$, mentre la probabilità che ci si trovi in un intervallo di tempo di tipo T_1 è pari a $\frac{T_2}{T_1+T_2}$. Di conseguenza, la singola sorgente emetterà pacchetti alla frequenza media

$$\lambda_i = \frac{T_1}{T_1+T_2}\cdot\frac{1}{40\cdot 10^{-3}}+\frac{T_2}{T_1+T_2}\cdot\frac{1}{50\cdot 10^{-3}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{40\cdot 10^{-3}}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{50\cdot 10^{-3}}=20.833 \text{ pacchetti/sec}$$

La frequenza media complessiva con cui arrivano pacchetti al multiplatore dovrà tenere conto del fatto che le sorgenti che caricano il multiplatore sono $M=60$.

$$\Rightarrow \lambda = M\cdot\lambda_i = 60\cdot 20.833 = 1250 \text{ pacchetti/sec}$$

Se si vuole avere un tasso di utilizzazione del multiplatore pari al 90%, il tasso di servizio del sistema dovrà essere

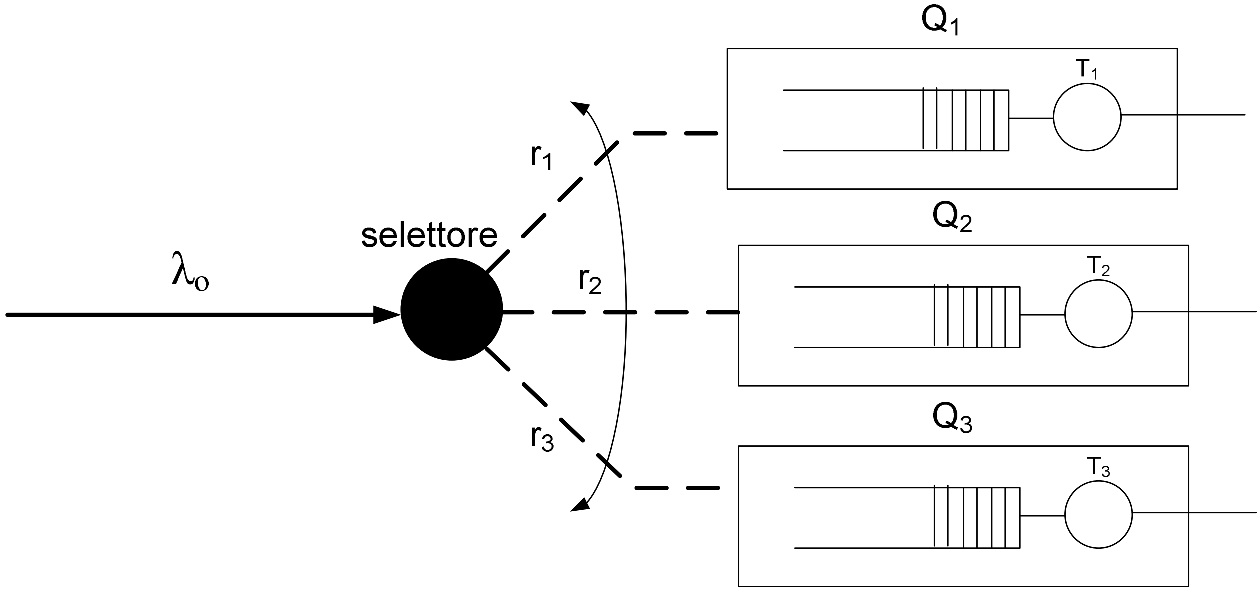
$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{1250}{0.9} = 1388.89 \text{ pacchetti/sec}$$

Sfruttando il dato sulla lunghezza media dei pacchetti, è possibile ricavare la capacità della linea d'uscita C. In particolare

$$C = 1388.89\cdot 600\cdot 8 = 6.67 \text{ Mbps}$$

Esercizio 3

Sia dato un nodo di rete a pacchetto con una linea d'ingresso e tre linee d'uscita. Le tre linee d'uscita sono modellabili come tre sistemi a coda senza perdita, denominati Q1, Q2, Q3. Le richieste di servizio sono offerte all'ingresso del nodo e, attraverso un selettore, sono inoltrate verso le code Q1,Q2,Q3. Il selettore lavora in modo statistico inoltrando la richiesta di servizio verso Q1 con probabilità r1, verso Q2 con probabilità r2 e verso Q3 con probabilità r3. I tempi di servizio dei sistemi Q1, Q2 e Q3 hanno valori medi rispettivamente T1 = 50ms, T2=100ms, T3=200ms. Assumendo che il processo d'ingresso sia caratterizzato da una distribuzione esponenziale negativa dei tempi di interarrivo e che la frequenza media di richieste offerte sia λo, si determinino i valori di r1, r2, r3 tali che il traffico smaltito dai sistemi Q1,Q2,Q3 sia uguale.



Svolgimento

Il traffico smaltito da un sistema M/M/1 coincide con il carico del sistema, che è pari al rapporto tra la frequenza media di arrivo e la frequenza media di servizio. La frequenza media di arrivo alla coda Q_i è $\lambda_o \cdot r_i$, mentre la frequenza media di servizio della coda Q_i è $1/T_i$. Di conseguenza, risulta

$$\begin{cases} \lambda_o \cdot r_1 \cdot T_1 = \lambda_o \cdot r_2 \cdot T_2 \\ \lambda_o \cdot r_1 \cdot T_1 = \lambda_o \cdot r_3 \cdot T_3 \\ \lambda_o \cdot r_2 \cdot T_2 = \lambda_o \cdot r_3 \cdot T_3 \end{cases}$$

che è anche equivalente a

$$\begin{cases} r_1 \cdot T_1 = r_2 \cdot T_2 \\ r_1 \cdot T_1 = r_3 \cdot T_3 \\ r_2 \cdot T_2 = r_3 \cdot T_3 \end{cases}$$

Considerando due qualunque equazioni delle tre precedenti ed imponendo la condizione di normalizzazione sulle probabilità $r_1,\ r_2$ e r_3 ,si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} r_1 \cdot T_1 = r_2 \cdot T_2 \\ r_1 \cdot T_1 = r_3 \cdot T_3 \\ r_1 + r_2 + r_3 = 1 \end{cases}$$

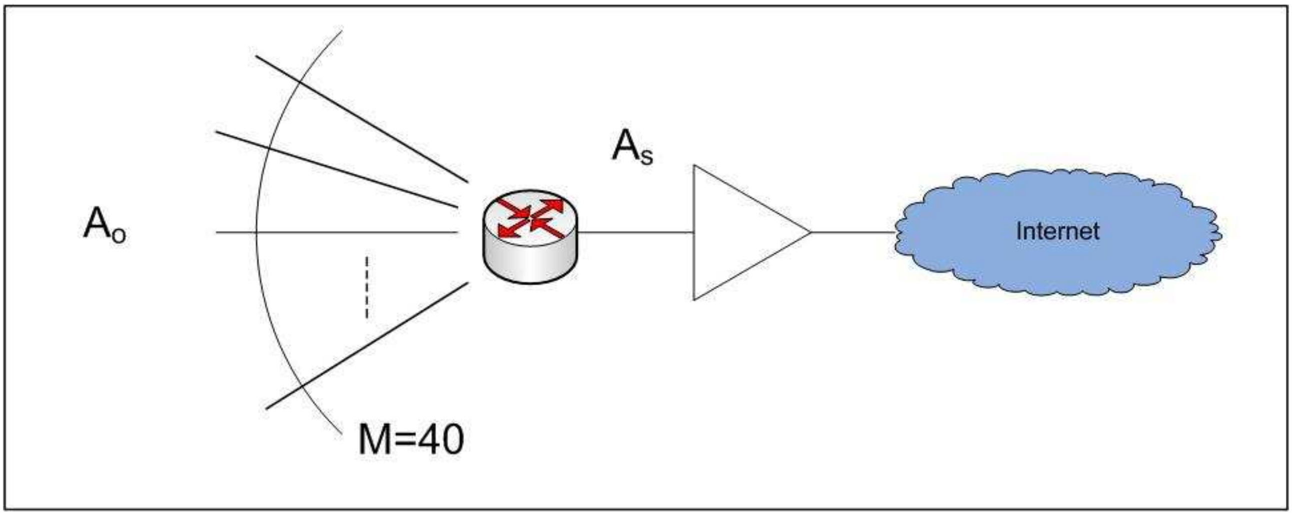
Risolvendo il precedente sistema di equazioni, si trova $r_1 = 0.5714,\ r_2 = 0.2857,\ r_3 = 0.1429$.

Esercizio 4

Un Internet Service Provider (ISP) è connesso mediante un router, da un lato, alla rete telefonica con M = 40 porte e, dall'altro lato, alla rete Internet. Si assuma che l'ISP riceva complessivamente 280 richieste ogni 8 ore e che la durata media della connessione sia 1 ora. Durante la chiamata, il flusso dati dell'utente è caratterizzato da un bit rate medio F = 11180 bit/sec. Determinare la capacità d'uscita che il multiplatore deve avere se si vuole che il rapporto di utilizzazione del multiplatore sia 0.8.

Svolgimento

La figura sottostante illustra schematicamente il sistema che il problema propone di studiare.



Il traffico complessivamente offerto dagli utenti all'ingresso del sistema è

$$A_o = \frac{270}{8} \cdot 1 = 35 \text{ Erl}$$

Se le porte a disposizione dell'ISP fossero infinite, il traffico offerto A_0 si ritroverebbe anche all'ingresso del multiplatore statistico che opera per l'ISP. Poiché però le porte a disposizione dell'ISP non sono infinite ma solo 40, una parte del traffico offerto A_0 andrà perduta e solo la frazione smaltita A_s si ritrova all'ingresso del multiplatore statistico.

Per calcolare la frazione smaltita del traffico offerto A_0, occorre prima calcolare la probabilità di perdita mediante l'uso delle tabelle dirette di Erlang. In particolare

$$P_{perdita} = B(35,40) = 0.054$$

Di conseguenza il traffico che effettivamente si presenta all'ingresso del multiplatore è

$$A_s = A_o\left(1 - P_{perdita}\right) = 35(1 - 0.054) = 33.11 \text{ Erl}$$

Si ricorda inoltre che il valore appena trovato è un valore medio e rappresenta il numero medio di connessioni smaltite, ossia il numero medio di richieste di connessione che giunge al multiplatore. Ossia

$$r = 33.11 \cdot 11180 = 370170 \text{ bps}$$

Pertanto se si vuole avere un tasso di utilizzazione dell’80%, la capacità della linea d’uscita del multiplatore deve essere

$$C = \frac{r}{\rho} = \frac{370170}{0.8} = 462712 \text{ bps}$$