

La modulazione numerica

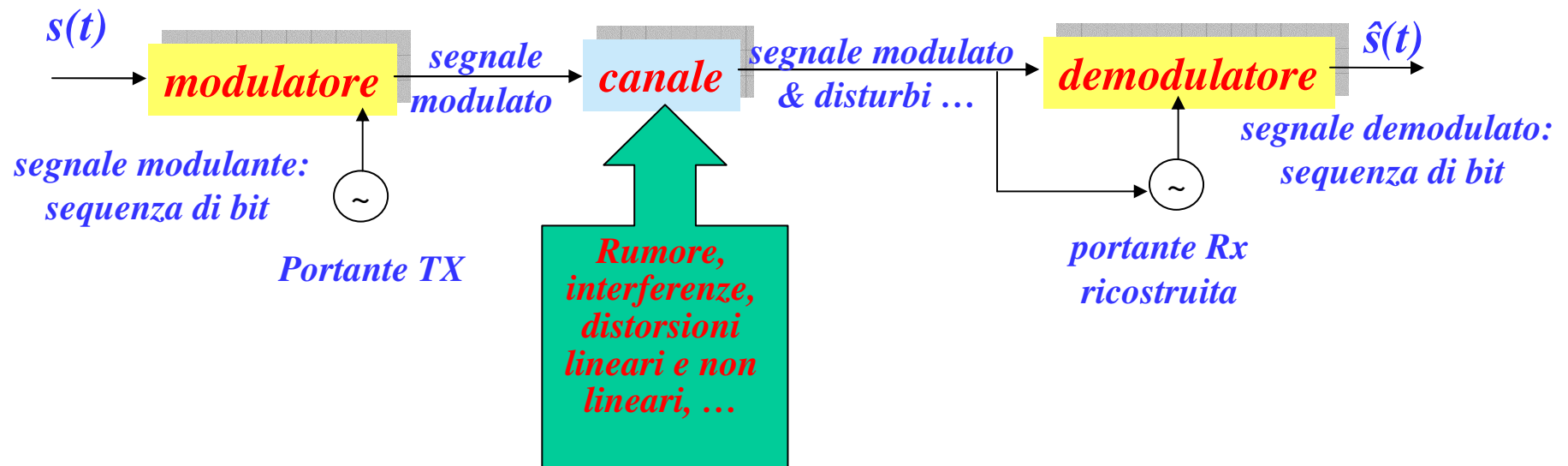
Mauro Giaconi

Principi di modulazione numerica

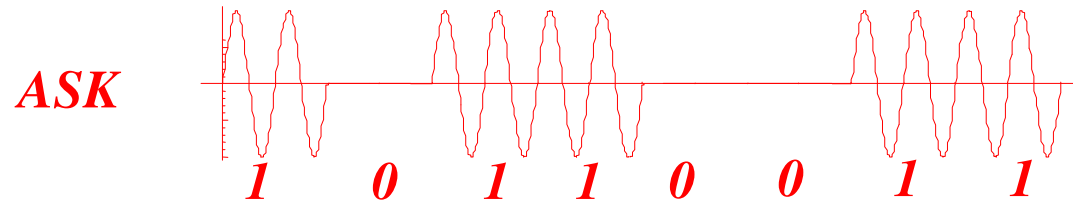
Modulazione numerica

- La modulazione “*trasla*” l’informazione di banda base in *banda traslata*;
- *bit o gruppi di bit da trasmettere sono associati a variazioni discrete dei parametri della portante trasmessa (ampiezza, fase o frequenza), così che il ricevitore possa ricostruirli a partire dalla portante modulata ricevuta (il rumore o le interferenze possono provocare errori in decisione).*

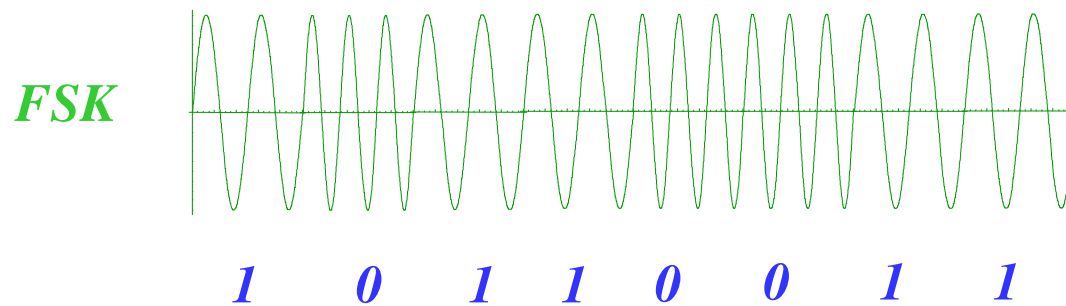
Mo-demodulazione coerente (il ricevitore ricostruisce la portante non modulata, come riferimento per la rivelazione)



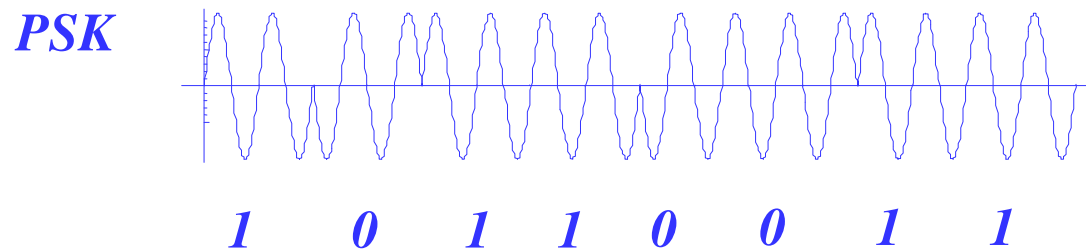
Le modulazioni numeriche - esempio binario: $s(t) = \{0,1\}$



Amplitude Shift Keying
ampiezza: $A = A(s(t))$

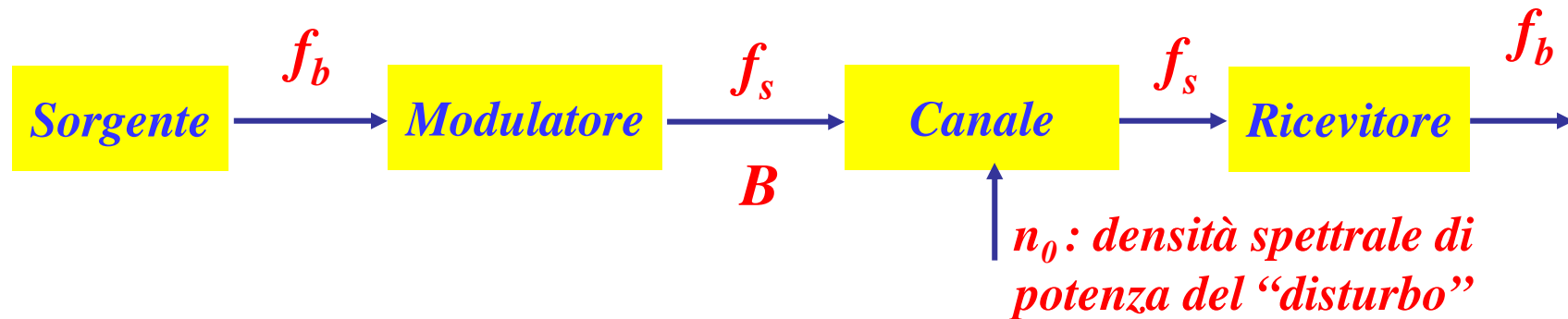


Frequency Shift Keying
frequenza: $f_0 = f(s(t))$



Phase Shift Keying
fase: $\phi = \phi(s(t))$

l'occupazione di banda del segnale modulato

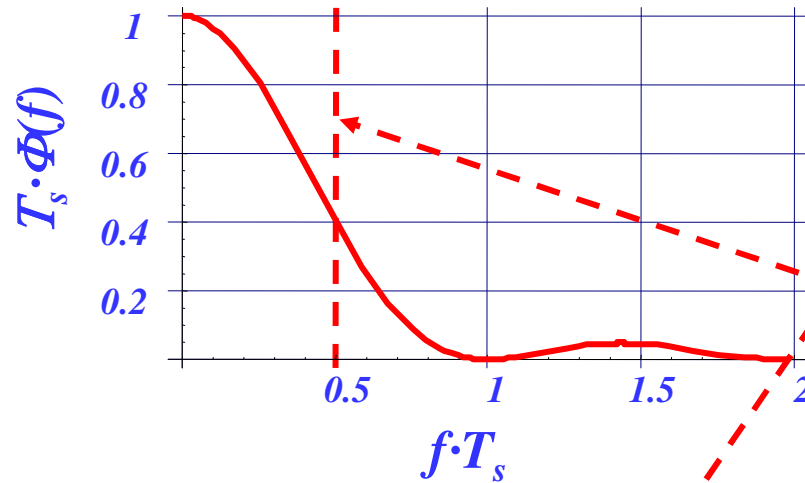


- *La sorgente emette simboli binari con rate f_b (bit/s);*
- *il modulatore emette, con frequenza di “simbolo” f_s (simboli/s) un “segnale” scelto tra M disponibili (più propriamente, scelto tra M variazioni discrete di ampiezza, di fase o di frequenza), associandolo a gruppi di simboli binari costituiti da $\log_2 M$ bit;*
- *ad esempio: con $M = 16$ “segnali”, $f_s = f_b / \log_2 M$, ovvero $f_s = (1/4)f_b$.*

l'occupazione di banda del segnale modulato

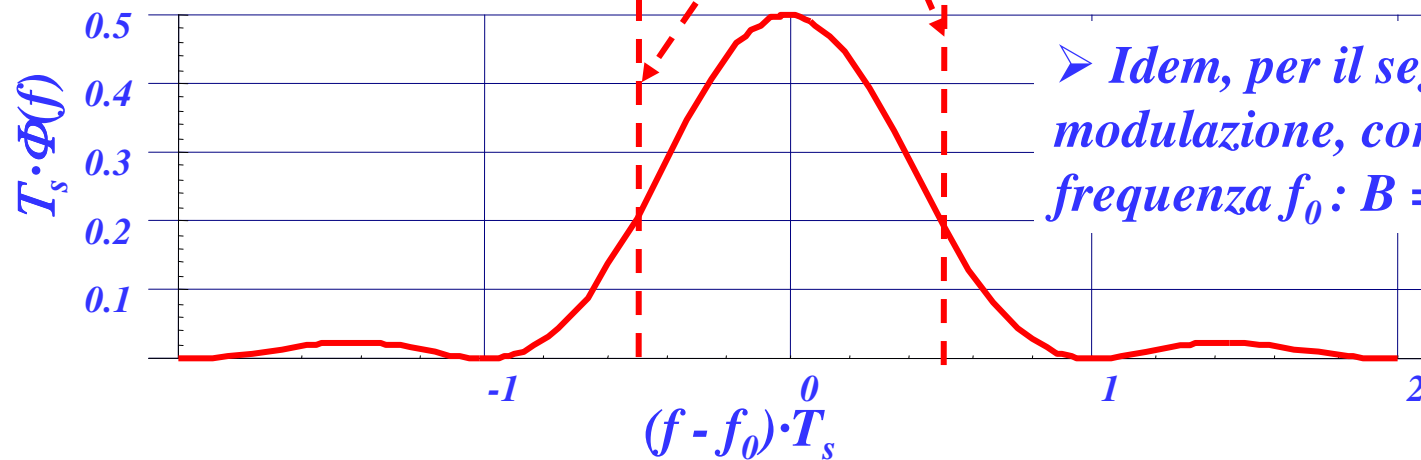
- *Lo spettro (di potenza) in banda traslata del segnale modulato è pari, per le modulazioni “lineari” (ASK, DSB, PSK, QAM), alla **traslazione** nell’intorno della portante (a “destra” e a “sinistra” di essa: le due “semibande” di modulazione) dello spettro (di potenza) di banda base;*
- *per tali modulazioni “lineari”, l’occupazione di banda B è legata direttamente alla frequenza di simbolo: la banda minima è $B_{min} = 2 \cdot f_N = f_s$ essendo f_N la metà della frequenza di simbolo, a sua volta pari a $f_b / \log_2 M$, essendo M il numero dei simboli (in realtà, la banda effettiva è più o meno estesa - ad esempio $+10\% \div +20\%$ - rispetto a tale valore minimo);*
- *per le modulazioni di frequenza (FSK e, anche, per la modulazione GMSK del GSM), lo spettro in modulazione non è, invece, riconducibile a tale, semplice, traslazione spettrale, come accennato nel seguito.*

l'occupazione di banda del segnale modulato



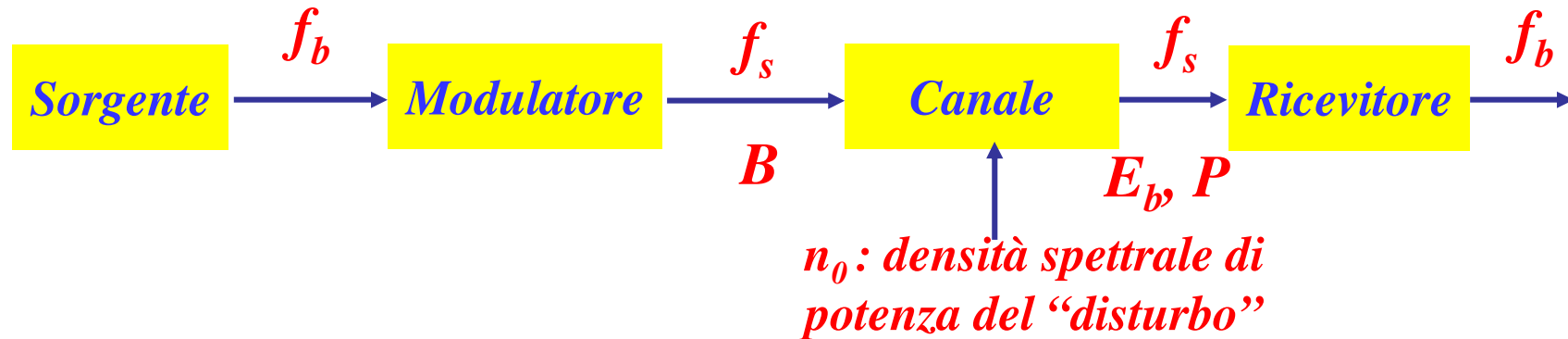
➤ *Spettro del segnale di banda base, non filtrato, relativa ai “simboli”, con tempo di simbolo T_s ;*

➤ *é indicata anche la banda minima (teorica) in banda base, $B = 1/(2T_s)$.*



➤ *Idem, per il segnale in modulazione, con portante a frequenza f_0 : $B = 1/(T_s)$.*

Potenza e energia media



L'energia media di simbolo è uguale alla potenza media moltiplicata per il tempo di segnalazione di simbolo (gruppo di bit a cui è associata una variazione elementare della portante: ampiezza, fase o frequenza); $E_s = P \cdot T_s = P/f_s$;

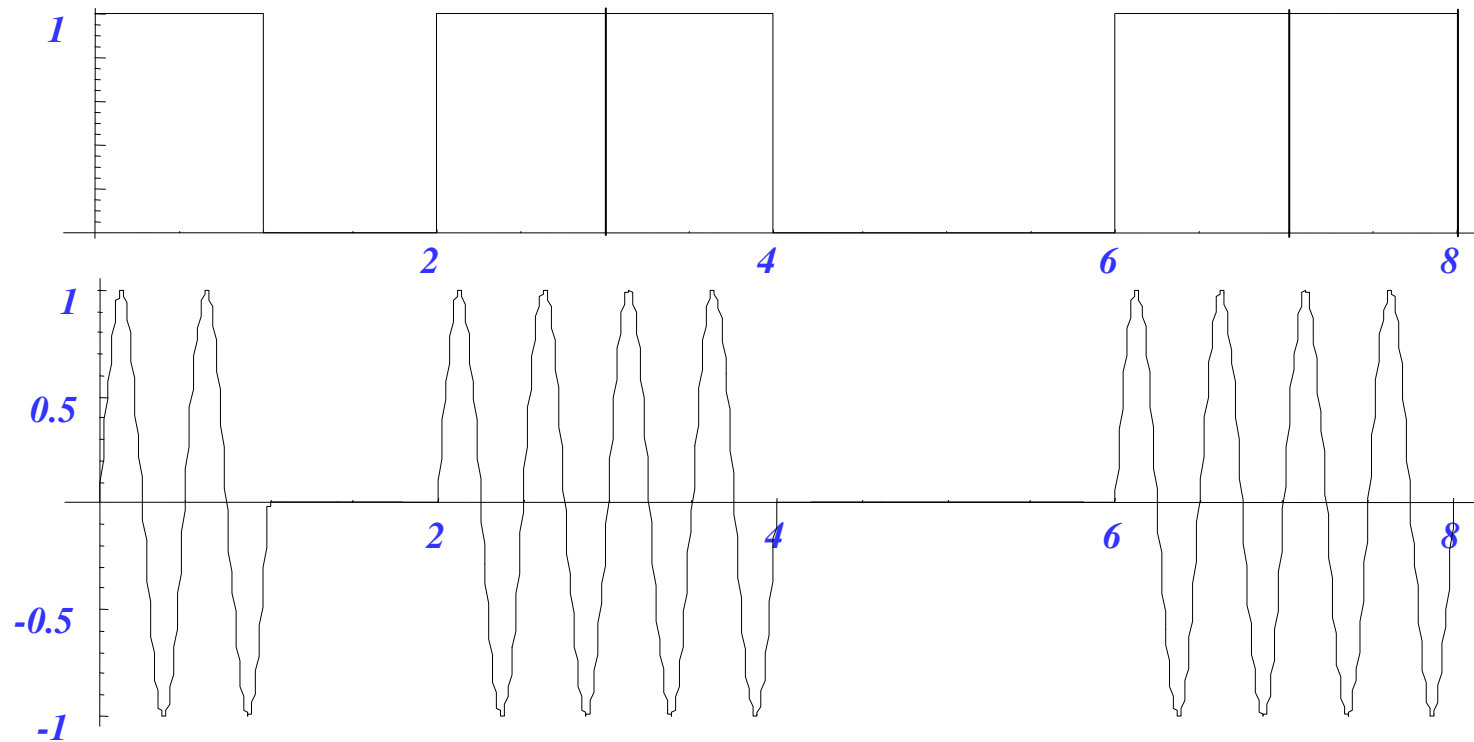
L'energia media di bit è uguale alla potenza media moltiplicata per il tempo di bit; $E_b = P \cdot T_b = P/f_b$; quindi, $E_s = E_b f_b / f_s$.

Modulazione di ampiezza

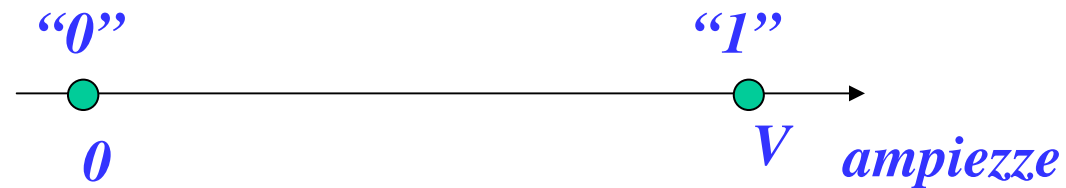
Modulazione di ampiezza 2 ASK (Amplitude Shift Keying)

Bit 0 \Rightarrow ampiezza 0

Bit 1 \Rightarrow ampiezza V



Modulazione di ampiezza 2 ASK



- ✓ *Occupazione di banda $B_{min} = 1/T_b = f_b$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*
- ✓ *Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 13.5$ dB*

Questa modulazione, denominata anche OOK (On Off Keying) è stata fra le prime impiegate nei ponti radio terrestri.

Modulazione di ampiezza 2 ASK - rigenerazione

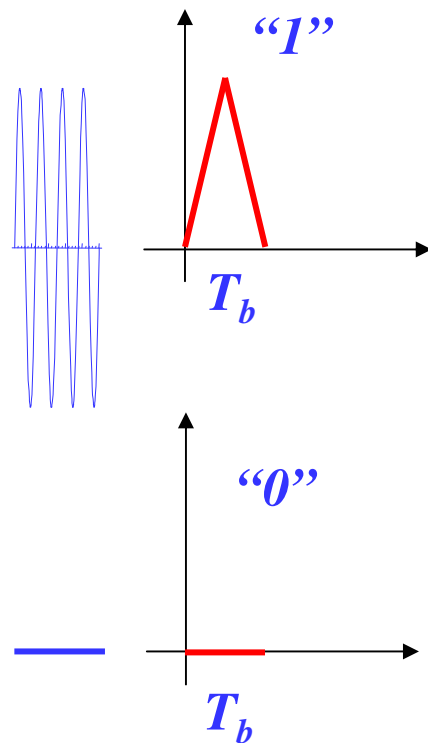
Al ricevitore, il segnale utile assume i due valori $\sqrt{2 E_s} = \sqrt{2 E_b} = \sqrt{2 P \cdot T_b}$ o 0, a seconda del valore del simbolo trasmesso.

Il rumore in decisione ha potenza (valore quadratico medio) $N_D = \sigma^2 = n_0/2$, ove n_0 è la densità spettrale del rumore (ad esempio, per il rumore termico, $n_0 = -144 \text{ dBm/kHz} + F \text{ dB}$, F cifra di rumore del ricevitore).

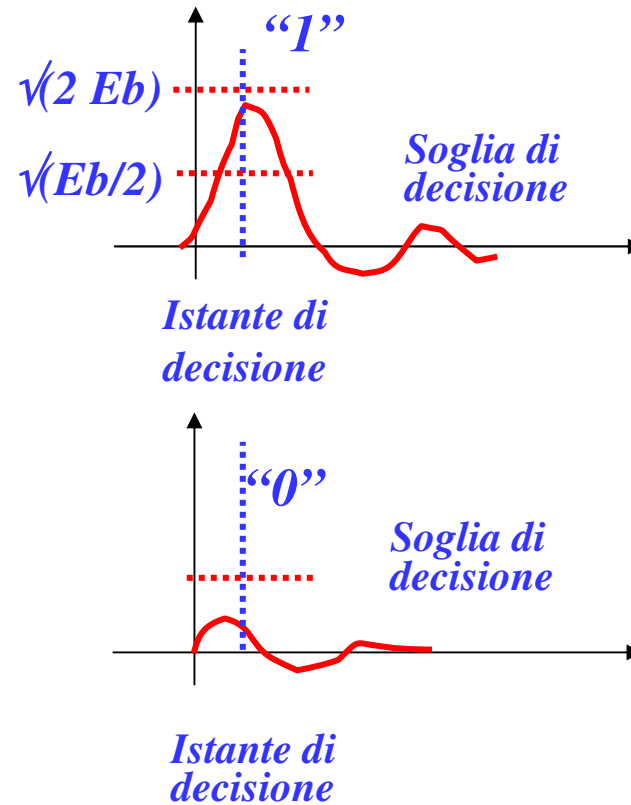
Il ricevitore pone una soglia a metà dei segnali utili ricevuti e decide in funzione dell'effettivo valore del segnale più rumore ricevuto.

Modulazione di ampiezza 2 ASK - rigenerazione

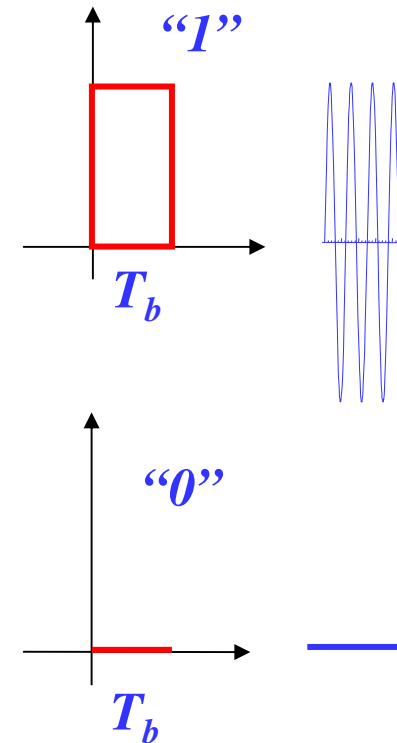
Segnali “nominali”
(filtrati) in ricezione



Segnali + rumore effettivi
(filtrati) in ingresso al decisore

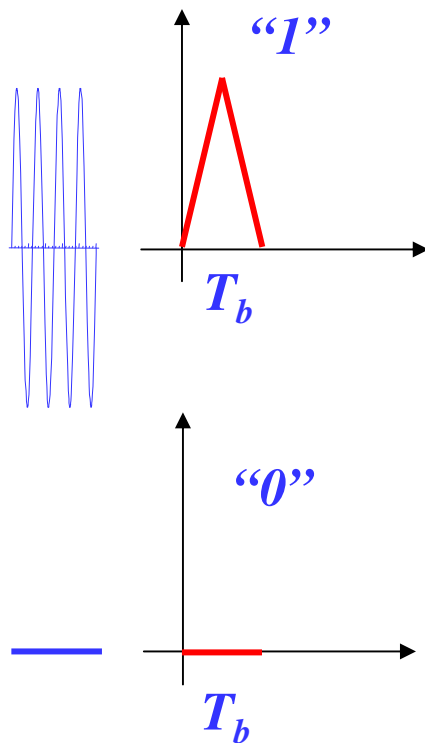


Segnali “rigenerati”
corretti

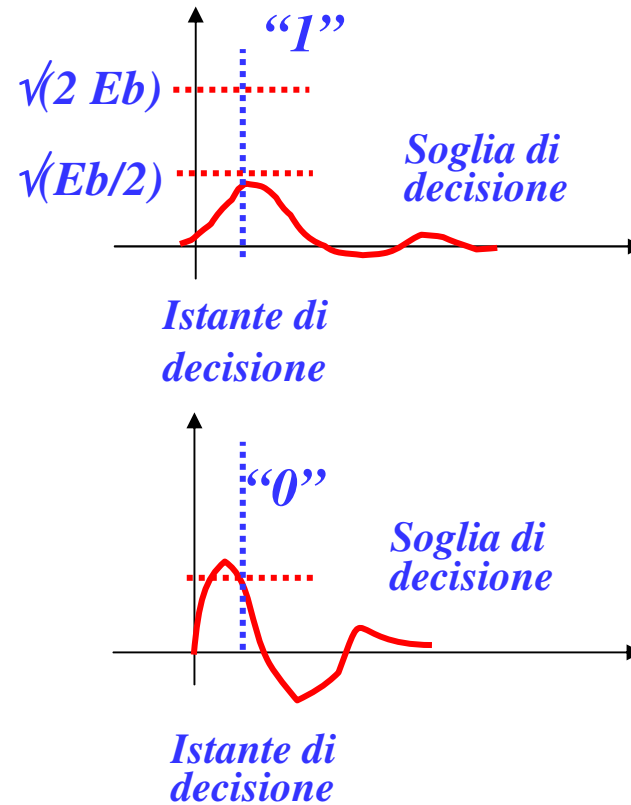


Modulazione di ampiezza 2 ASK - rigenerazione

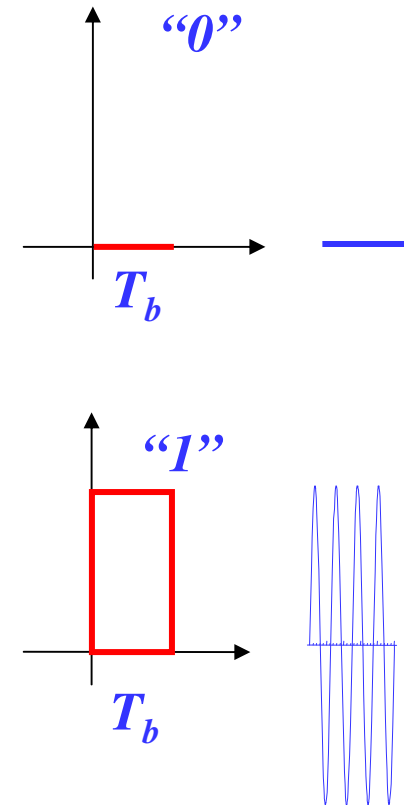
Segnali "nominali"
(filtrati) in ricezione



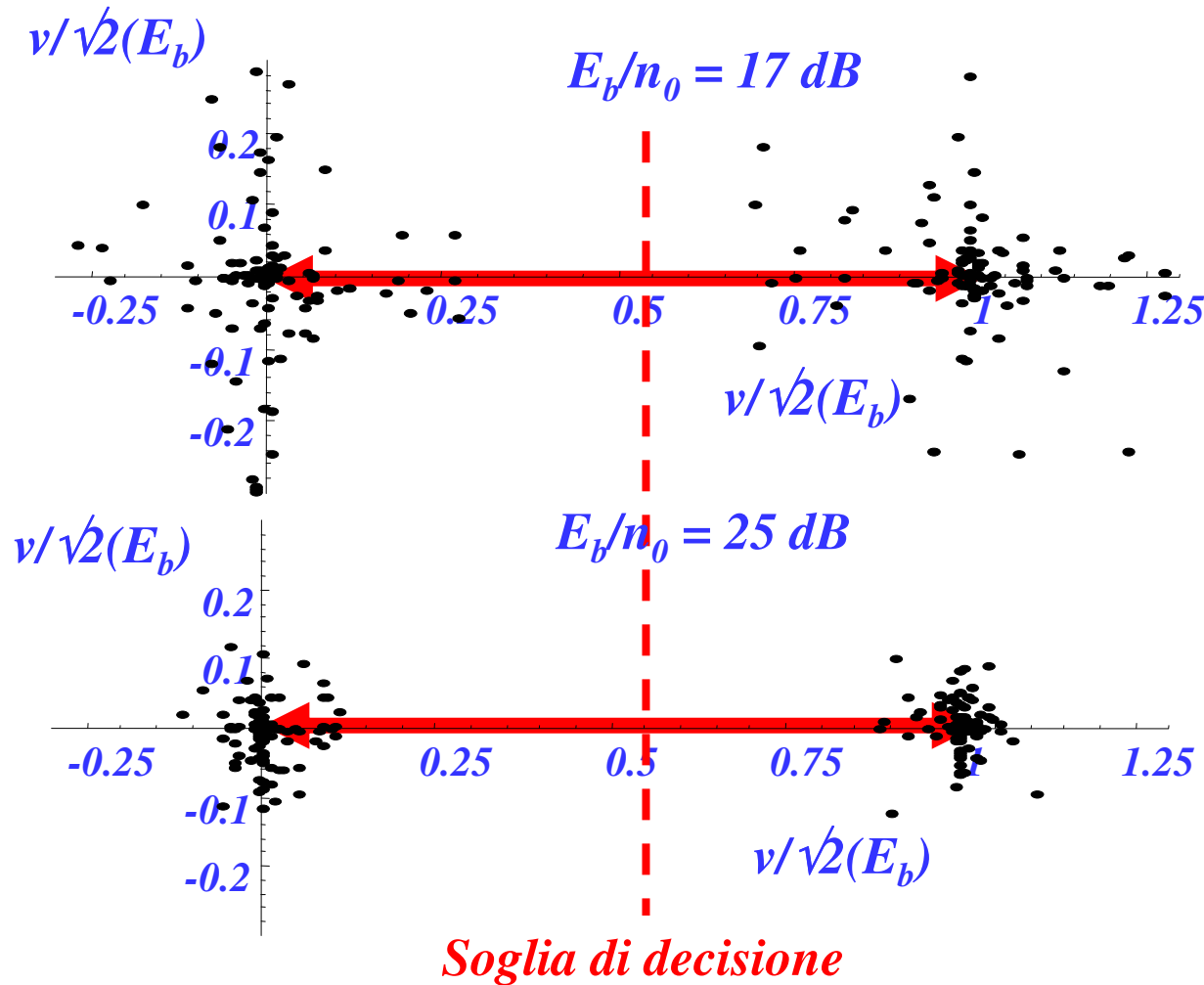
Segnali + rumore effettivi
(filtrati) in ingresso al decisore



Segnali "rigenerati"
errati



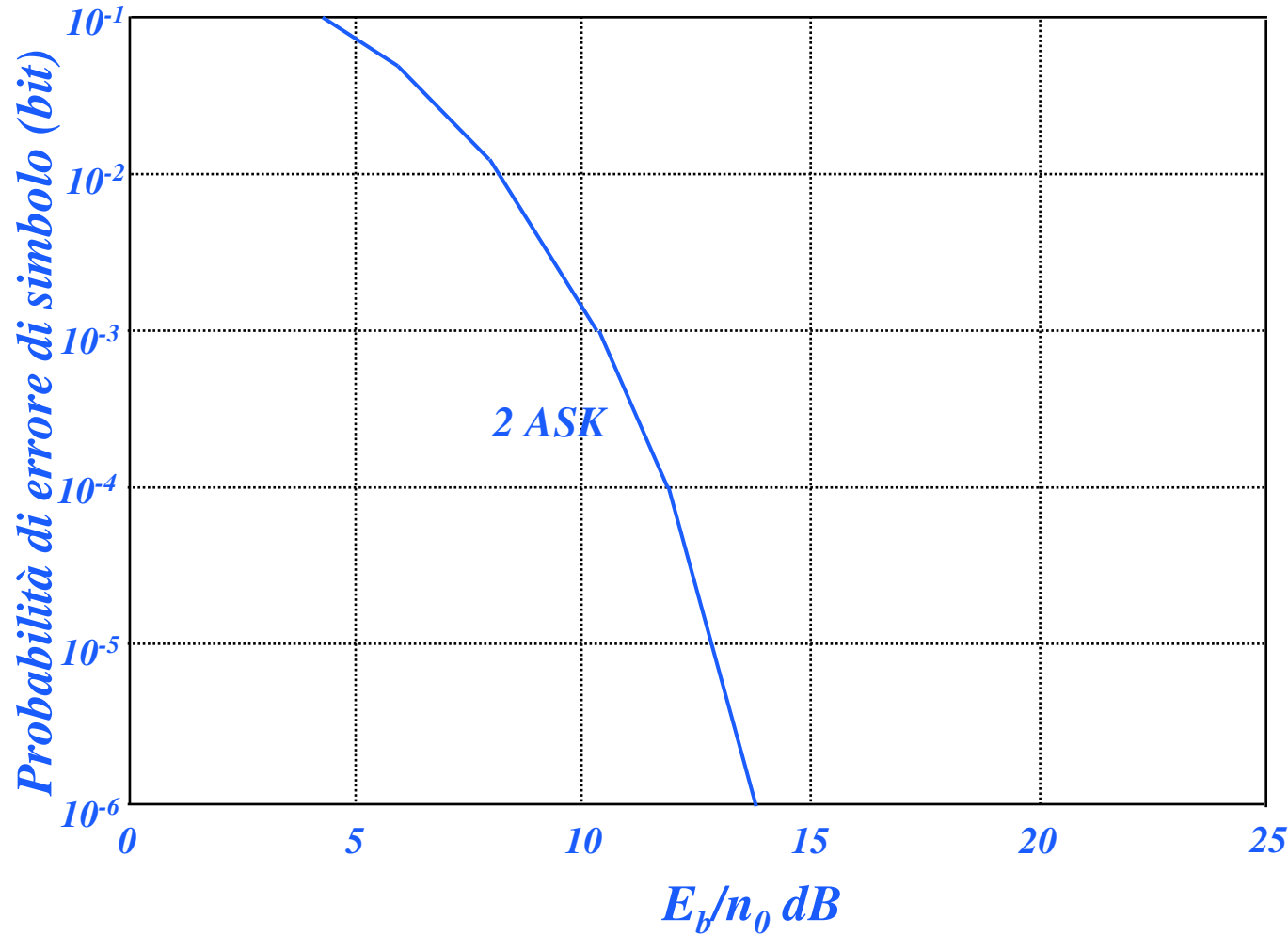
Modulazione di ampiezza 2 ASK



*Segnali + rumore
effettivi (filtrati)
in ingresso al
decisore,
nell'istante di
decisione*

*Il rumore causa
una probabilità di
errore crescente
al diminuire del
rapporto S/N,
segnale rumore*

2 ASK - probabilità di errore di simbolo (bit)



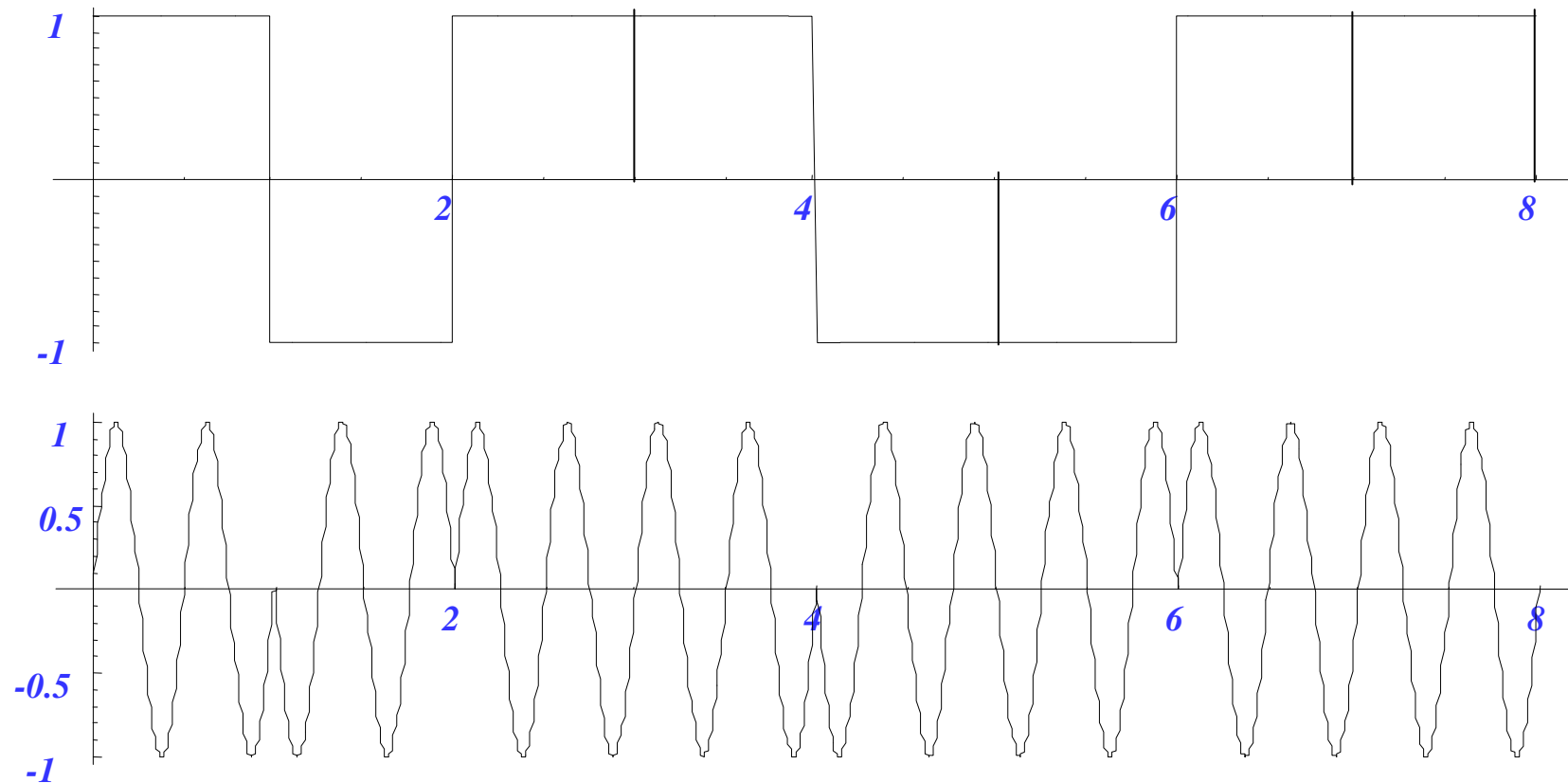
Il BER è indicato in funzione del rapporto segnale rumore espresso dal parametro E_b/n_0 .

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{n_0} &= \frac{S T_b}{N} = \frac{S T_b}{N} \\ &= \frac{S T_b}{T_b N} = \frac{S}{N} \end{aligned}$$

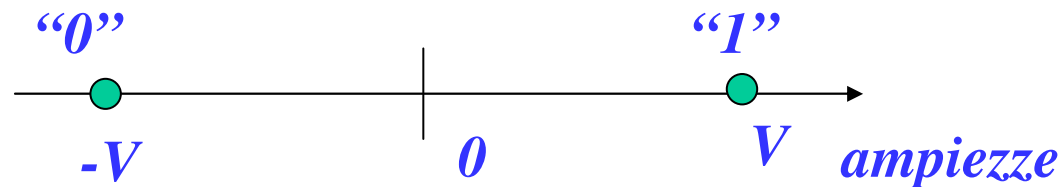
Modulazione di ampiezza 2 DSB (Double Side Band)

Bit 0 \Rightarrow ampiezza $-V$

Bit 1 \Rightarrow ampiezza V

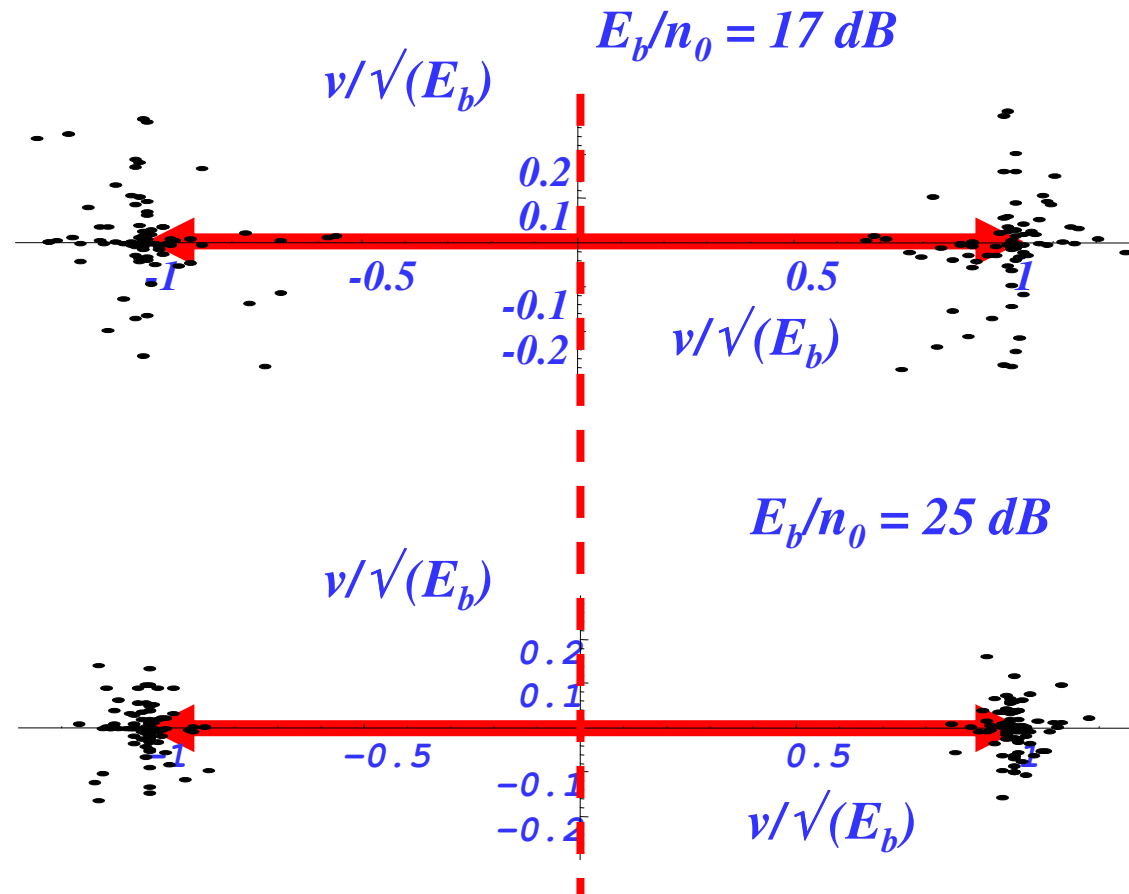


Modulazione di ampiezza 2 DSB



- ✓ *Occupazione di banda $B_{min} = 1/T_b = f_b$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*
- ✓ *Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 10.5$ dB*
- ✓ *La modulazione 2 DSB, che utilizza segnali positivi e negativi, occupa la stessa banda della 2 ASK, assicurando la stessa probabilità di errore con metà del valore del rapporto E_b/n_0 rispetto alla modulazione ASK (quindi, con metà potenza in ricezione).*

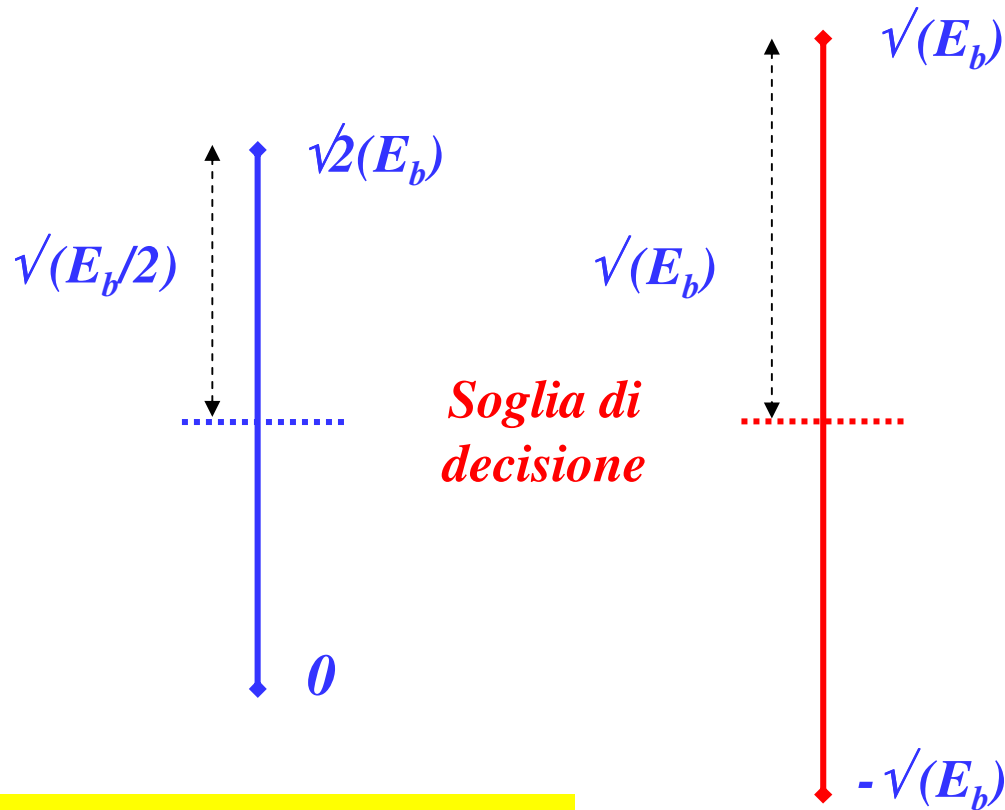
Modulazione di ampiezza 2 DSB



Soglia di decisione

E' evidente, a parità di valore del rapporto segnale rumore, il vantaggio della modulazione 2 DSB rispetto a quella 2 ASK.

Modulazione di ampiezza 2 DSB

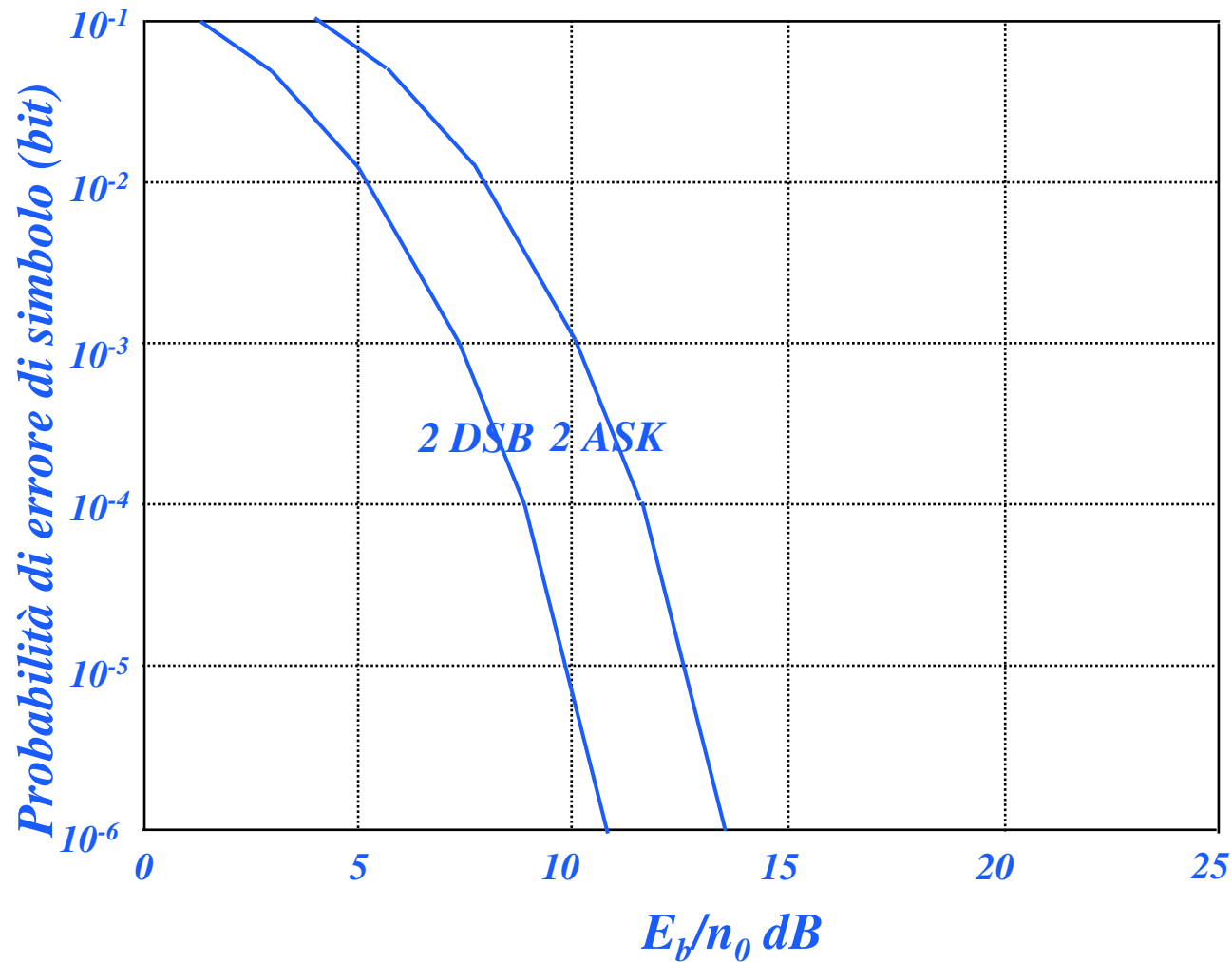


Situazione in decisione nella modulazione 2 ASK

Situazione in decisione nella modulazione 2 DSB

La modulazione 2 DSB ha un vantaggio in termini di potenza di 3 dB rispetto alla modulazione 2 ASK

2 DSB - probabilità di errore di simbolo (bit)



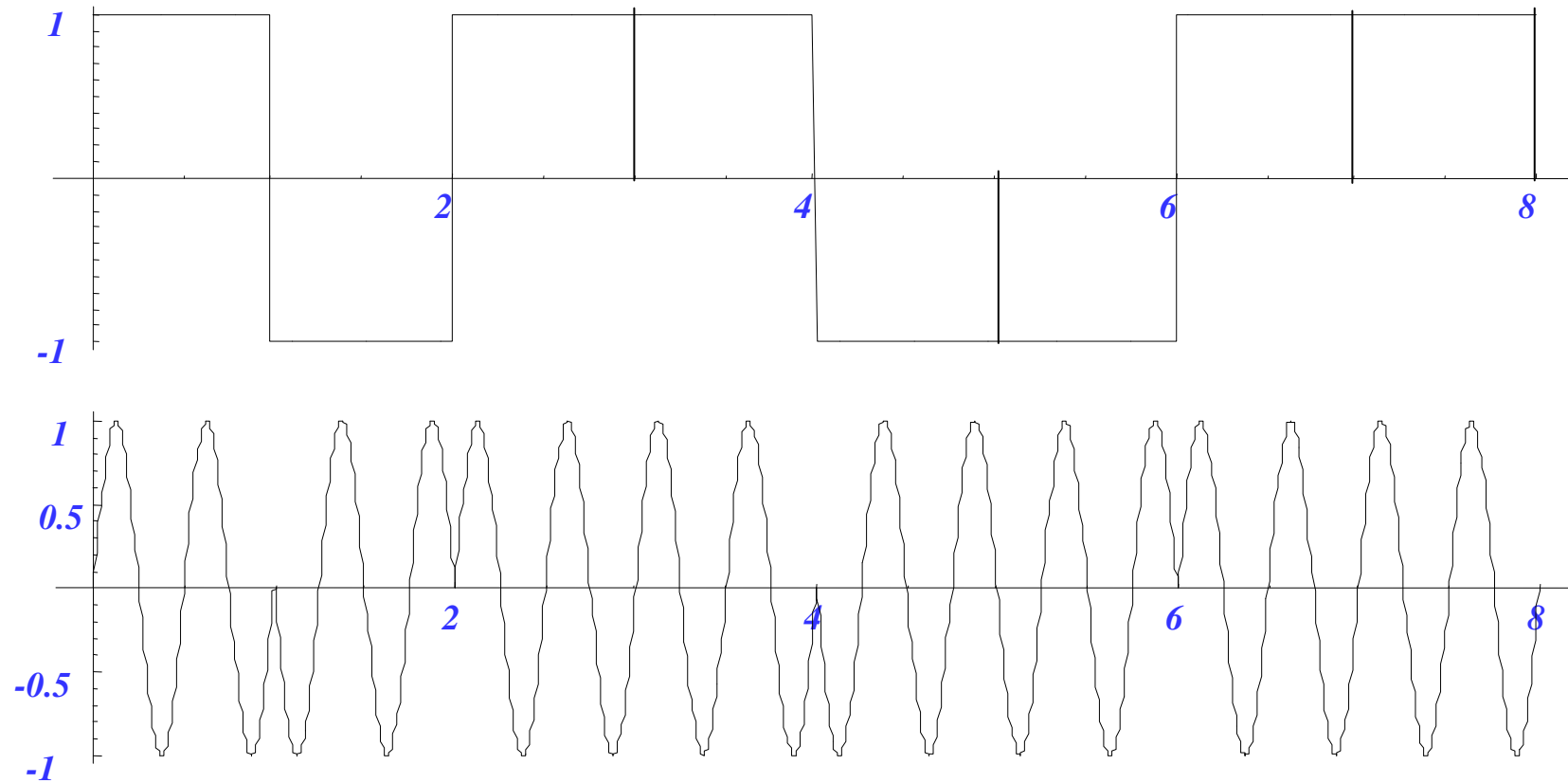
La modulazione 2 DSB ha un vantaggio in termini di potenza di 3 dB rispetto alla modulazione 2 ASK, a parità di banda in modulazione.

Modulazione PSK

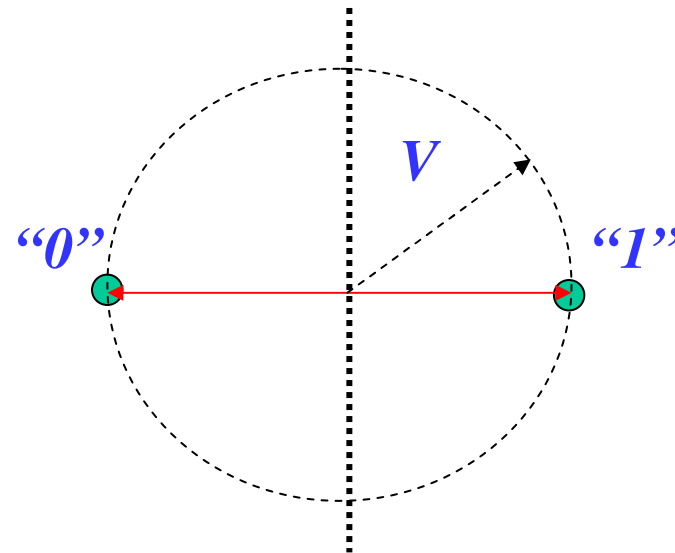
Modulazione 2 PSK (= 2 DSB)

Bit 0 \Rightarrow fase 0

Bit 1 \Rightarrow fase π (180°)



Modulazione 2 PSK (= 2 DSB)

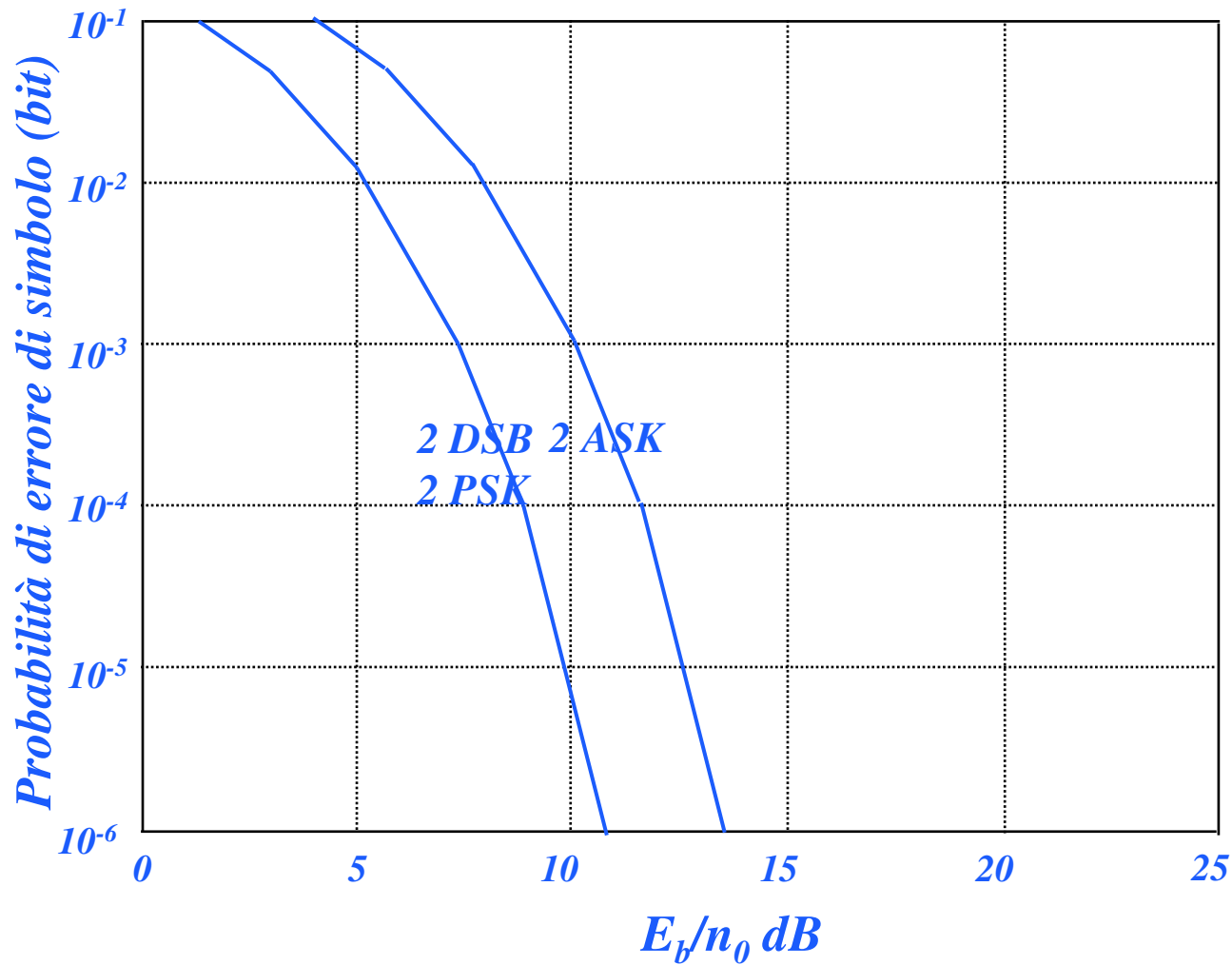


✓ *Occupazione di banda $B_{min} = 1/T_b = f_b$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*

✓ *Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 10.5$ dB (concettualmente almeno, la modulazione 2 PSK ha prestazioni identiche alla 2 DSB)*

La modulazione 2 PSK é stata fra le prime modulazioni numeriche utilizzate nei modem e nei ponti radio

2 PSK - probabilità di errore di simbolo (bit)



La modulazione 2 PSK ha un vantaggio in termini di potenza di 3 dB rispetto alla modulazione 2 ASK, a parità di banda in modulazione.

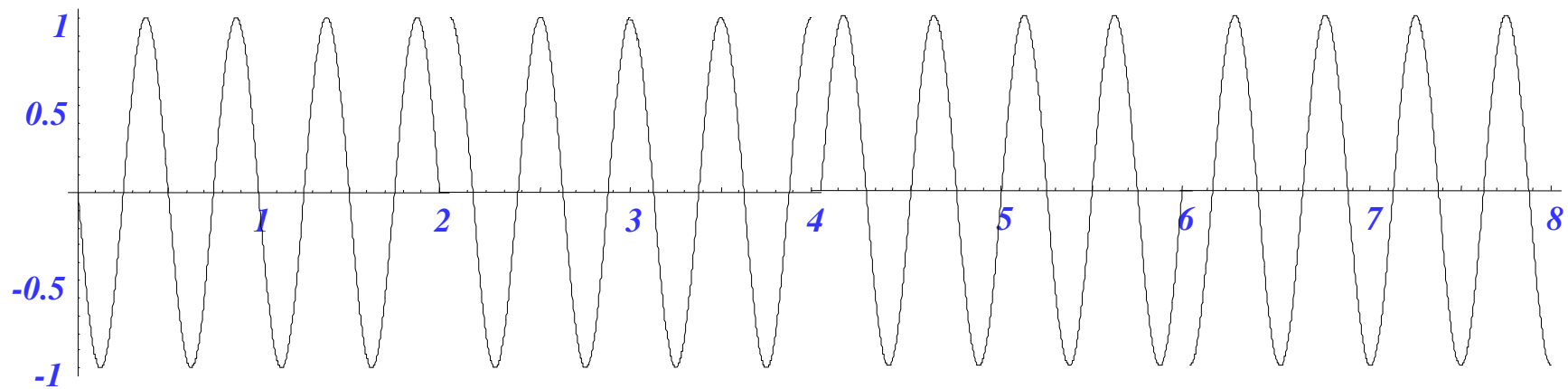
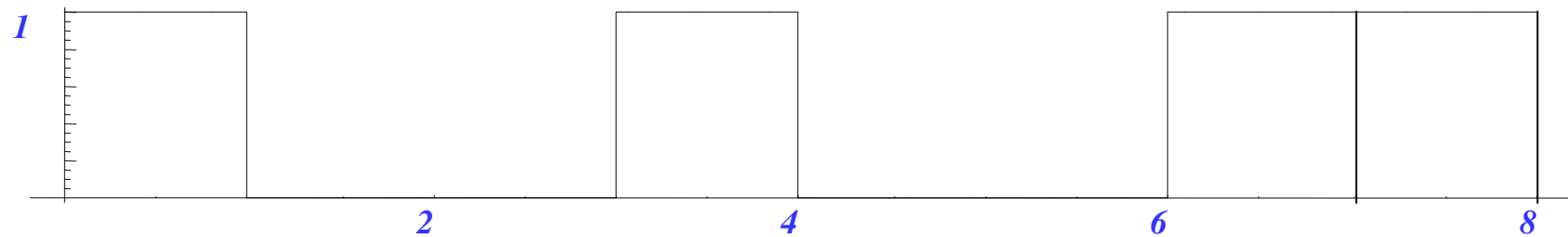
Modulazione 4 PSK

Bit 00 \Rightarrow fase 0

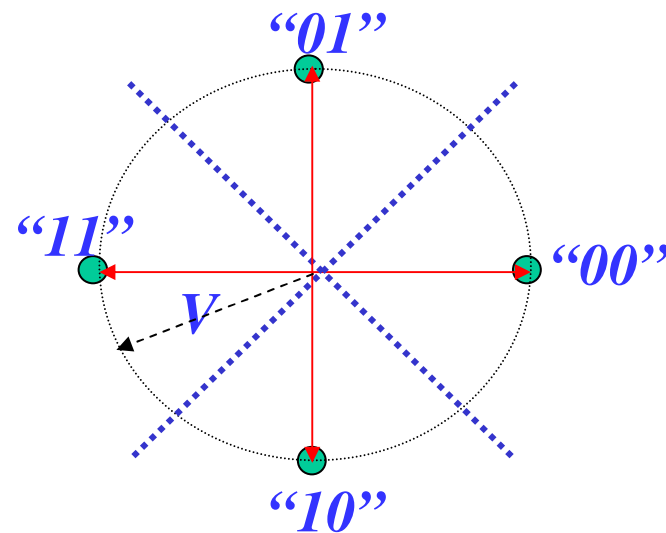
Bit 01 \Rightarrow fase $\pi/2$ (90°)

Bit 11 \Rightarrow fase π (180°)

Bit 10 \Rightarrow fase $3\pi/2$ (270°)



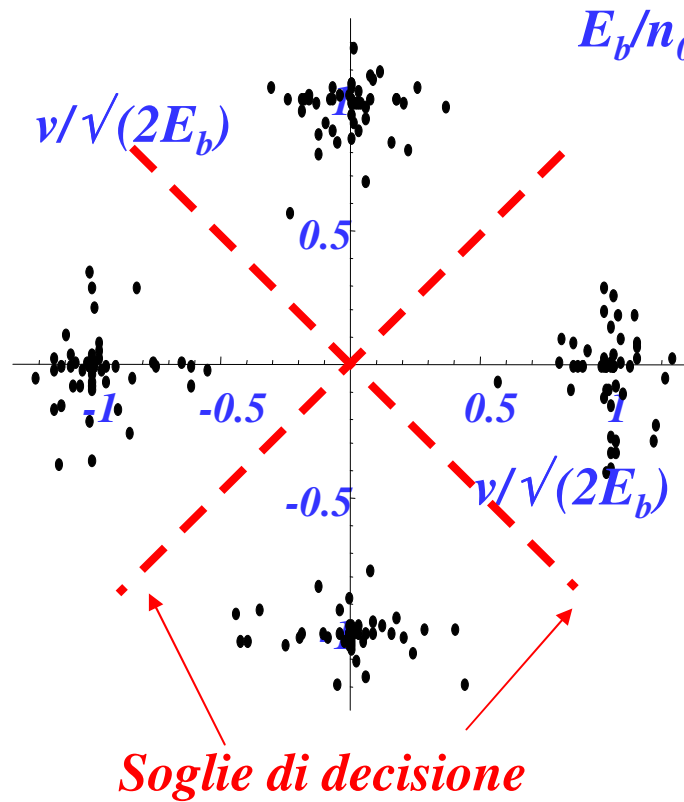
Modulazione 4 PSK



- ✓ Occupazione di banda $B_{min} = 1/2T_b = f_b/2$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)
- ✓ Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 10.5$ dB (la potenza in ricezione è la stessa di quella necessaria nel 2 PSK, ma la banda è la metà di quella del 2 PSK, quindi vi è un vantaggio evidente nell'impiego della modulazione 4 PSK rispetto alla modulazione 2 PSK)

E utilizzata nei sistemi radio terrestri e via satellite, e nei sistemi radiomobili, dove le condizioni di propagazione sono gravose.

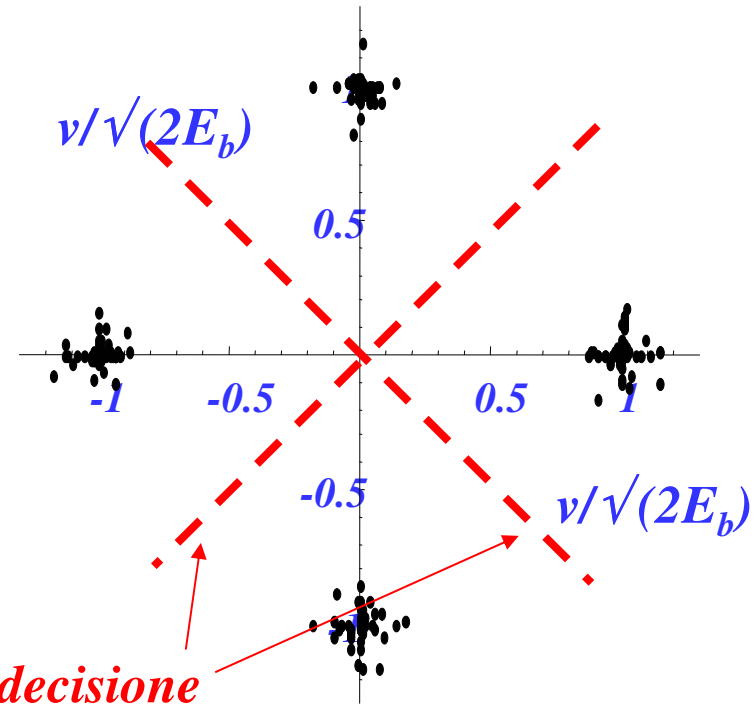
Modulazione 4 PSK



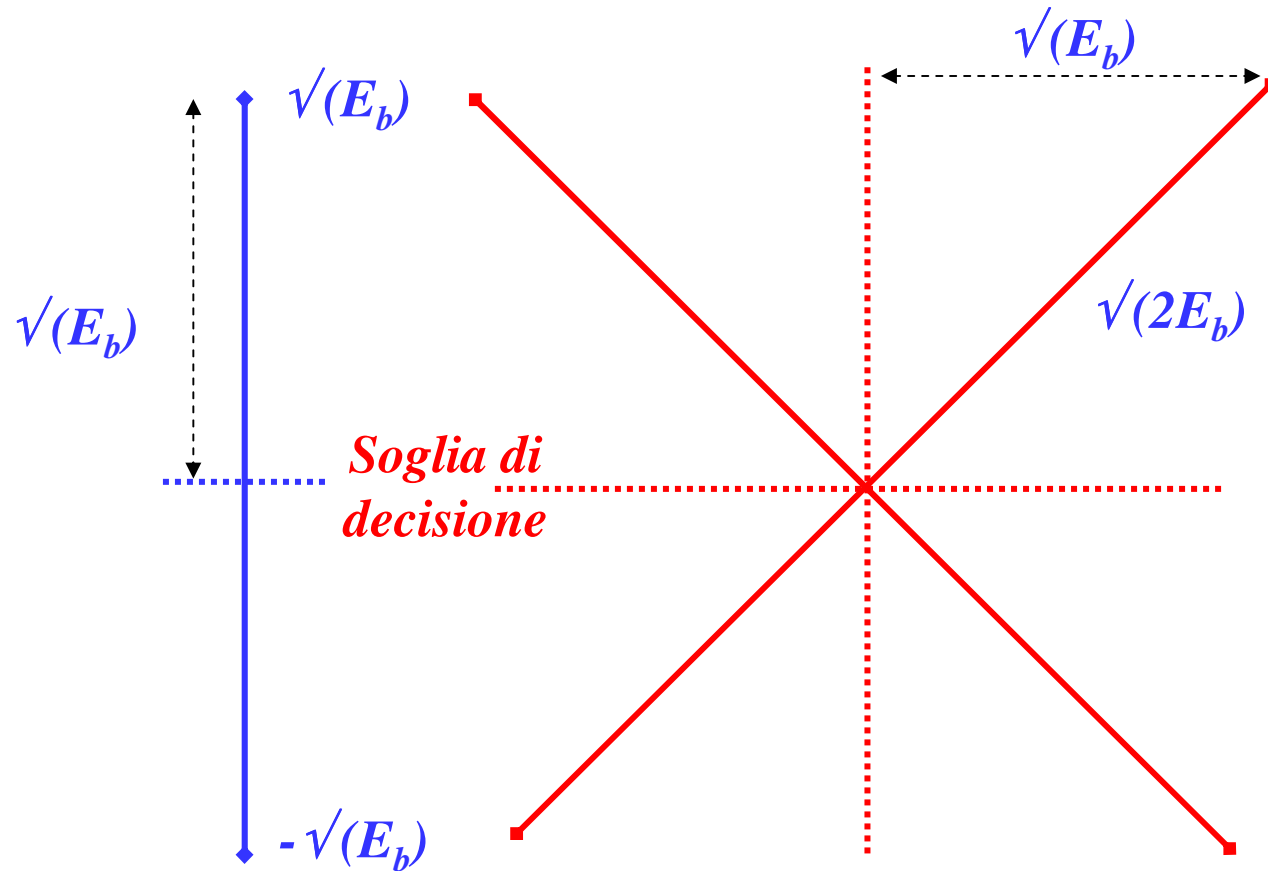
$E_b/n_0 = 25 \text{ dB}$

Soglie di decisione

E' abbastanza evidente, a parità di valore del rapporto segnale rumore, l'equivalenza delle modulazioni 2 PSK e 4 PSK



Modulazione 4 PSK

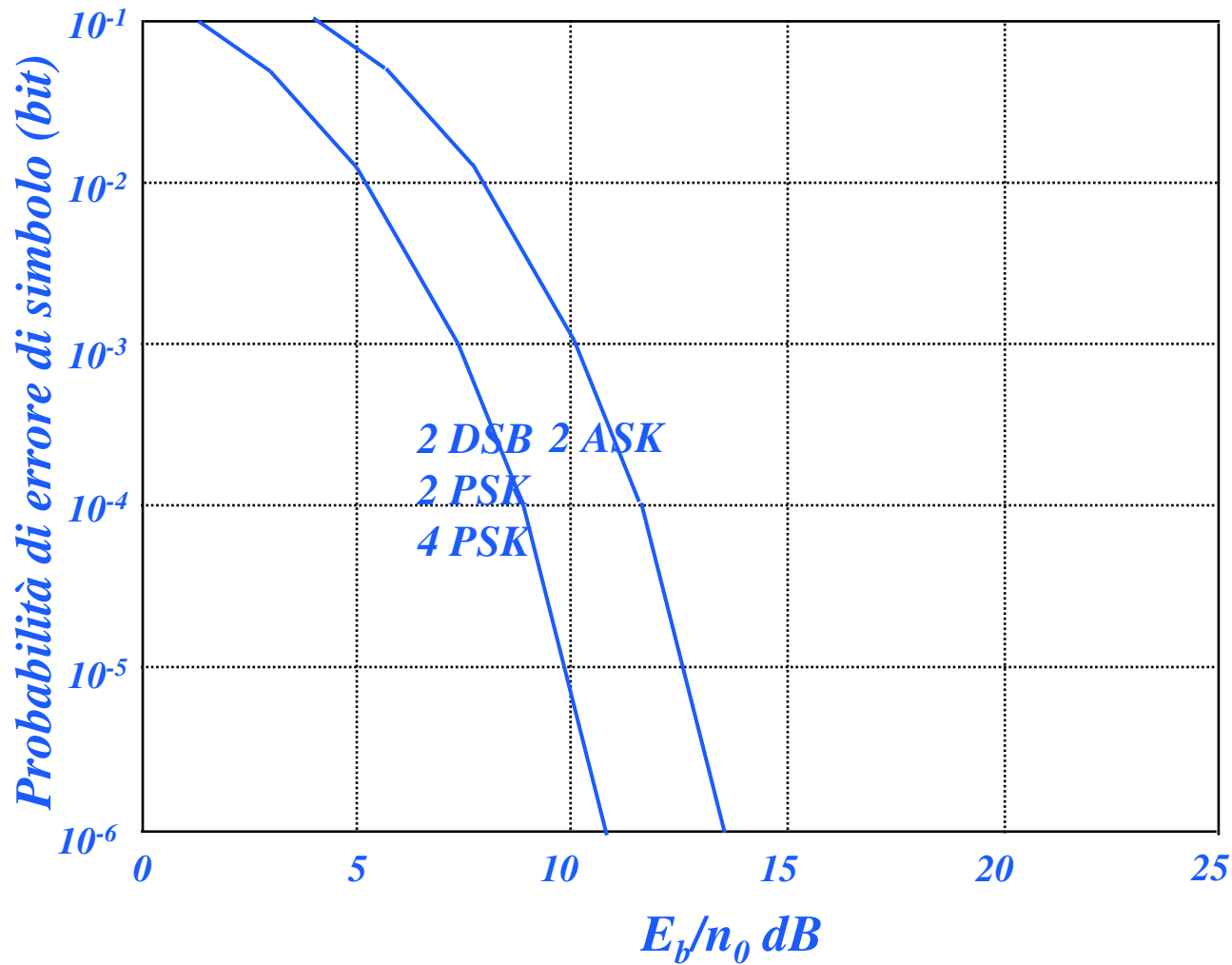


La modulazione 4 PSK ha le stesse prestazioni in termini di E_b/n_0 della modulazione 2 PSK

Situazione in decisione nella modulazione 2 DSB / 2 PSK

Situazione in decisione nella modulazione 4 PSK

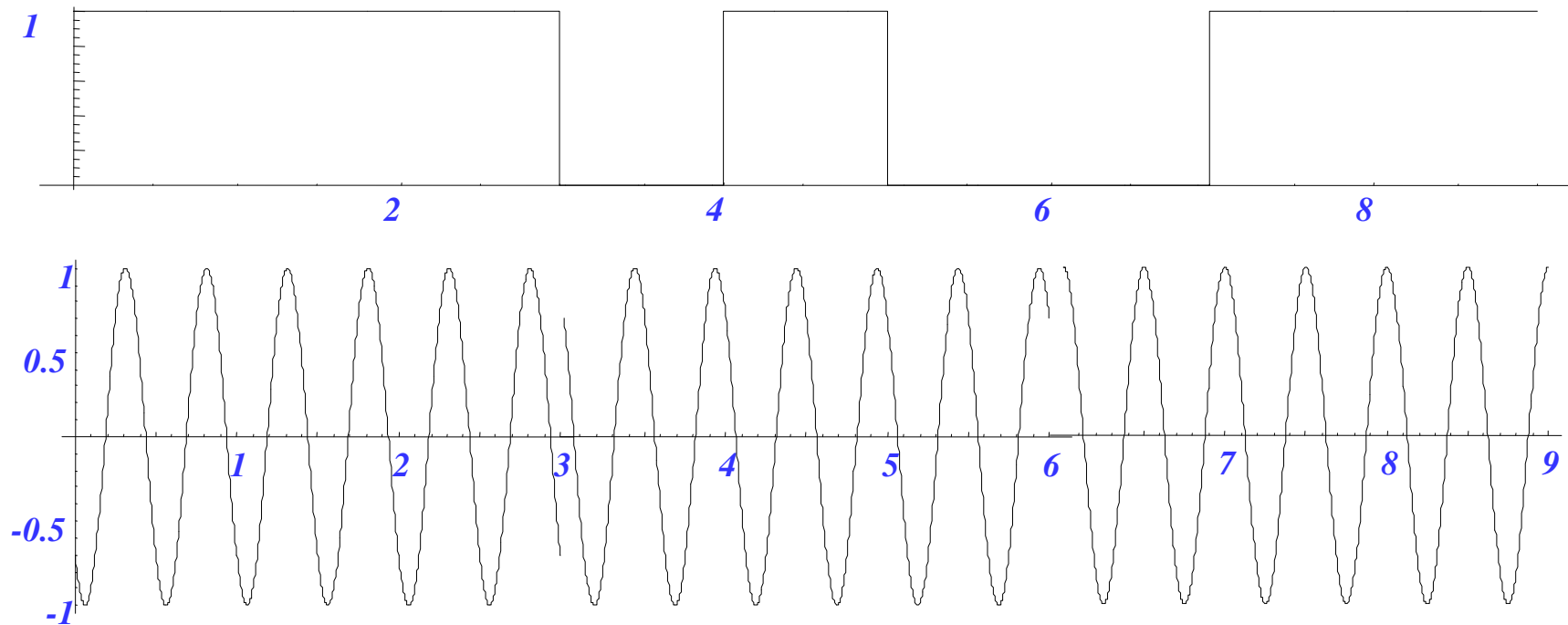
4 PSK - probabilità di errore di simbolo (bit)



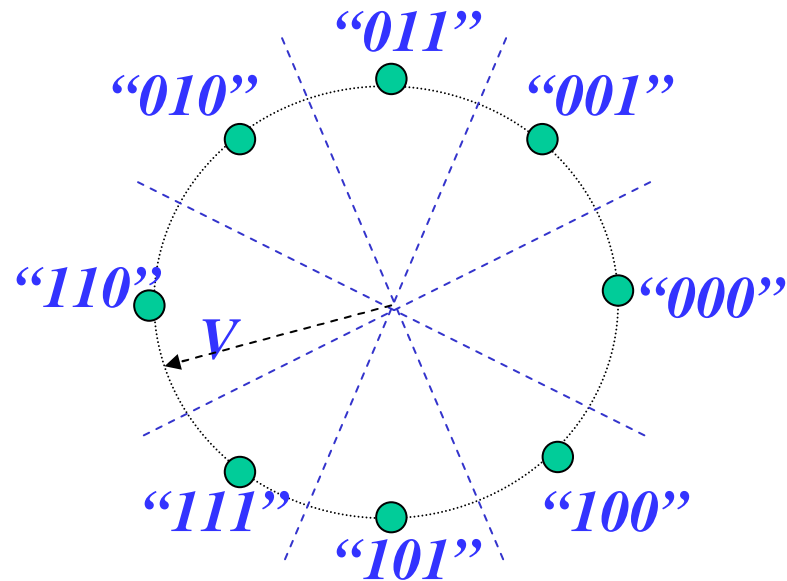
La modulazione 4 PSK ha le stesse prestazioni in termini di E_b/n_0 della modulazione 2 PSK, ma la banda in modulazione è la metà.

Modulazione 8 PSK

000 \Rightarrow fase 0 *001* \Rightarrow fase $\pi/4$ *011* \Rightarrow fase $\pi/2$ *010* \Rightarrow fase $3\pi/4$
110 \Rightarrow fase π *111* \Rightarrow fase $5\pi/4$ *101* \Rightarrow fase $3\pi/2$ *100* \Rightarrow fase $7\pi/4$



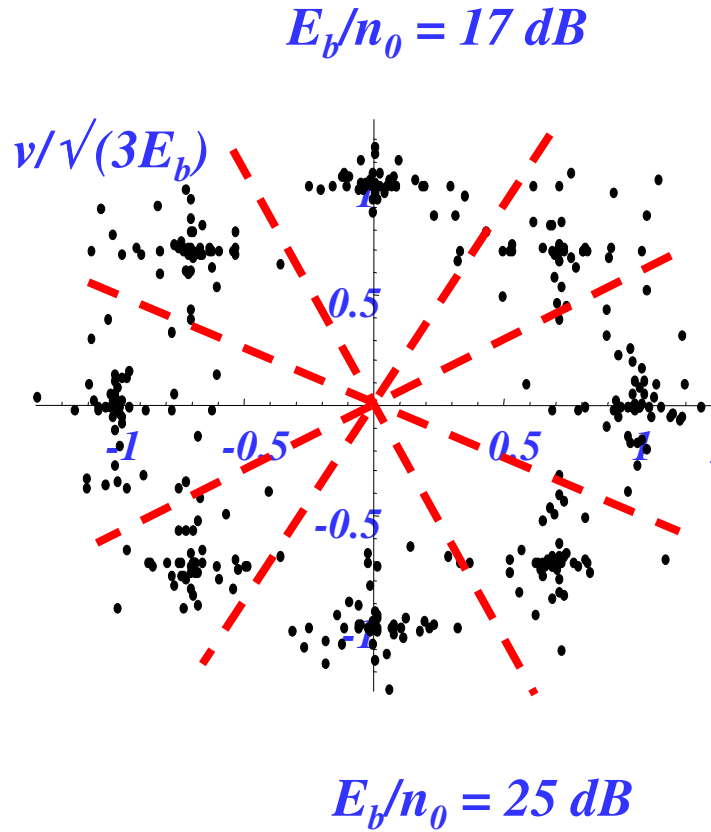
Modulazione 8 PSK



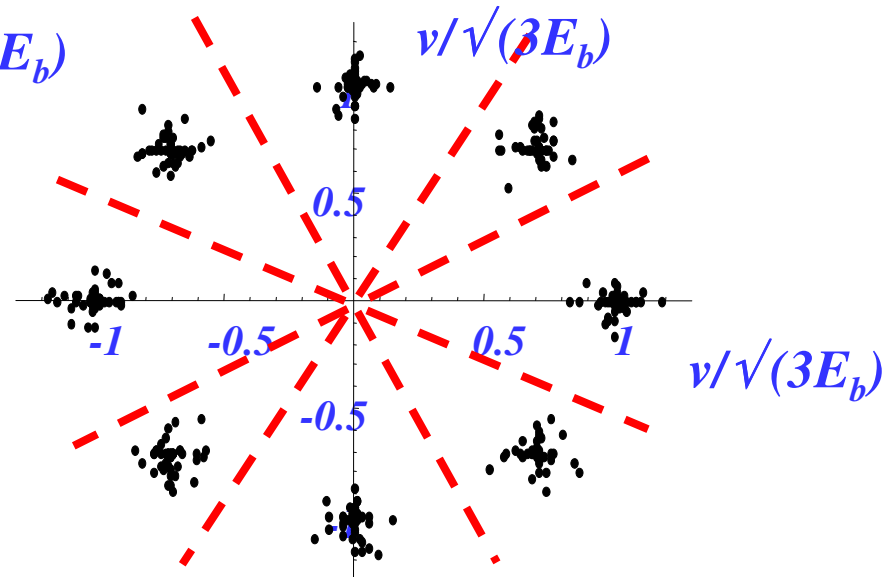
✓ Occupazione di banda $B_{min} = 1/(3T_b) = f_b/3$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)

✓ Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 14.6$ dB (quindi la potenza necessaria in ricezione è ≈ 2.5 volte maggiore di quella necessaria con 2 o 4 PSK)

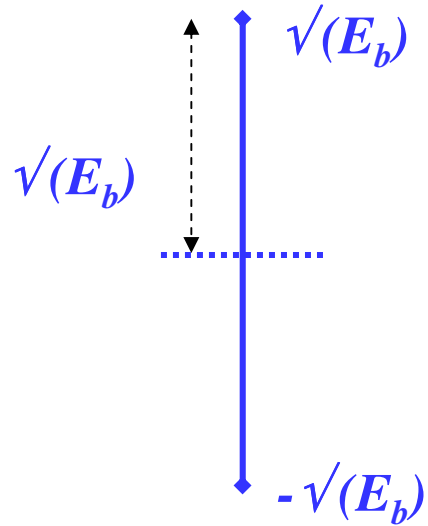
Modulazione 8 PSK



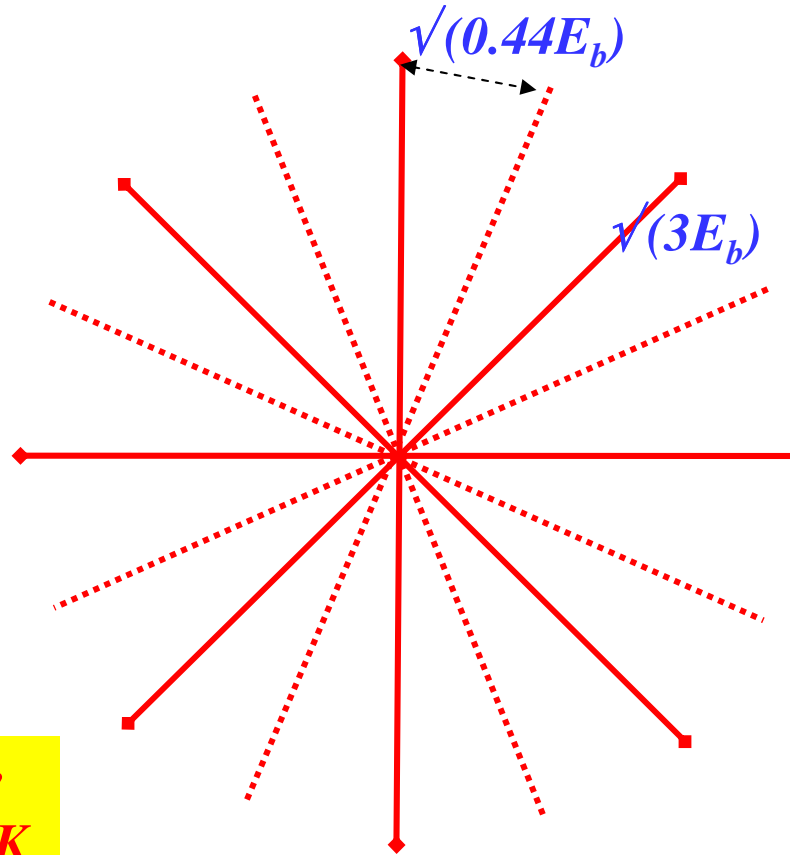
E' abbastanza evidente, a parità di valore del rapporto segnale rumore, il peggioramento della modulazione 8 PSK rispetto alle modulazioni 2 PSK e 4 PSK



Modulazione 8 PSK



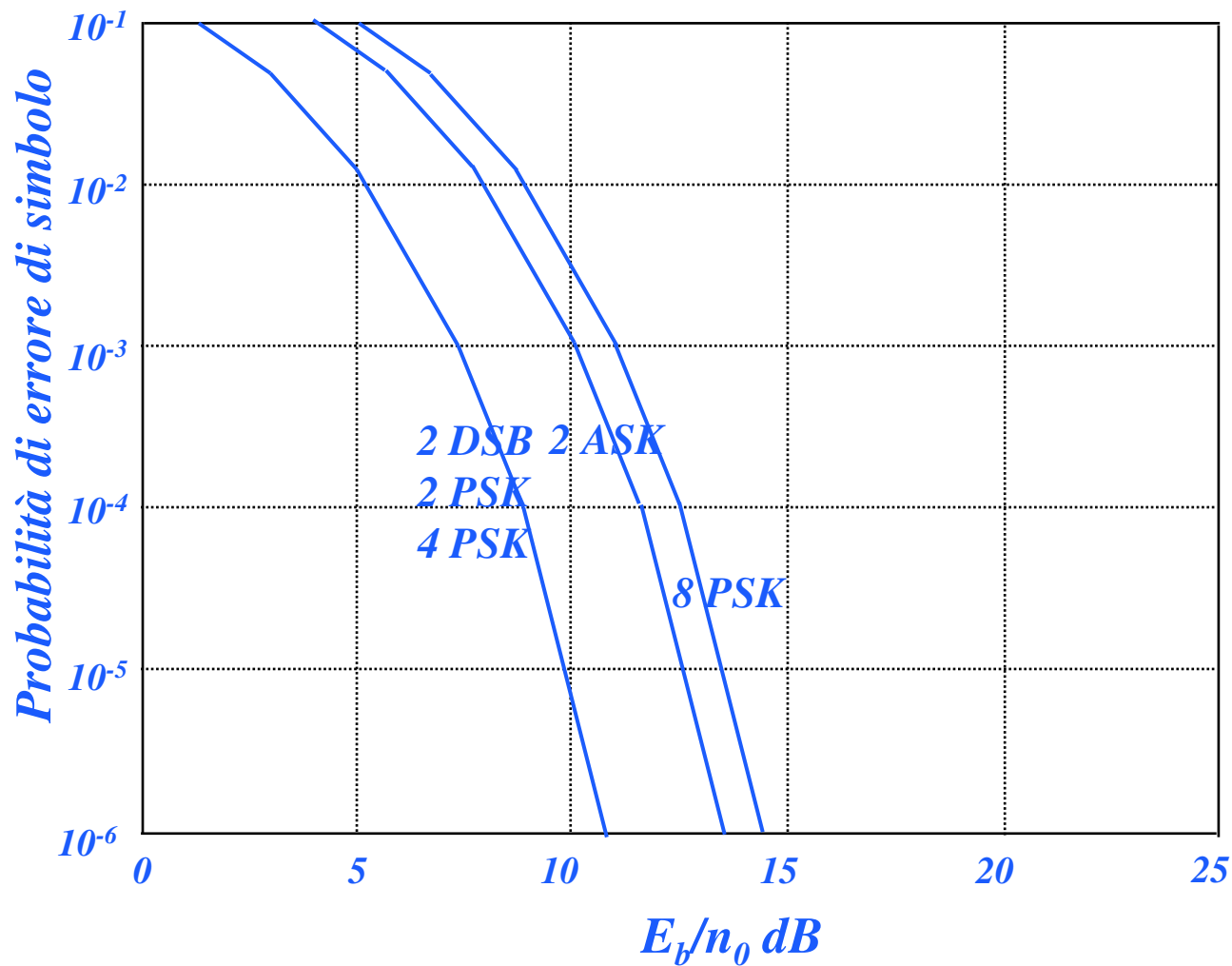
*Situazione in decisione
nella modulazione 2 PSK*



*Situazione in decisione
nella modulazione 8 PSK*

*La modulazione
8 PSK richiede
circa 4.1 dB in
più per il valore
di E_b/n_0 rispetto
alla
modulazione 2
PSK, ma la
banda è 1/3.*

8 PSK - probabilità di errore di simbolo

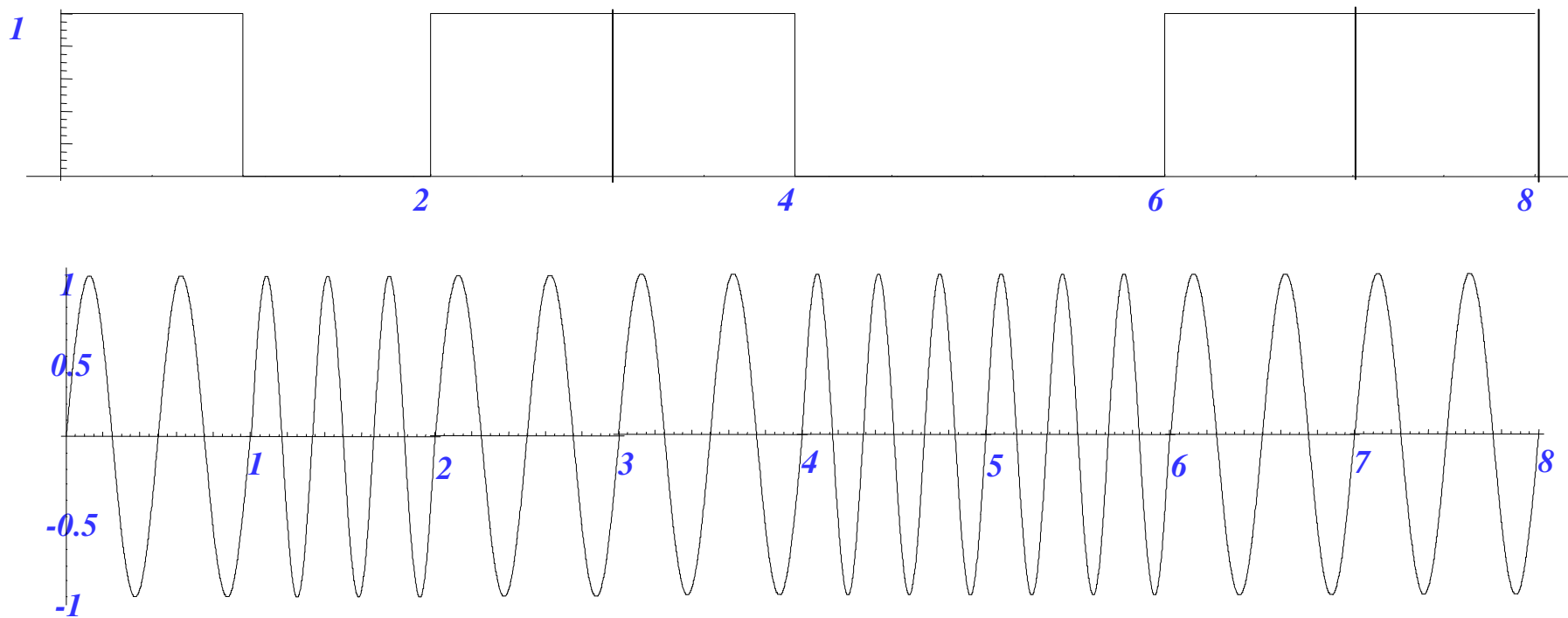


La modulazione 8 PSK richiede circa 4.1 dB in più per il valore di E_b/n_0 rispetto alla modulazione 2 PSK (una potenza 2.5 volte maggiore), ma la banda è 1/3.

Modulazione FSK

Modulazione 2 FSK

Bit 0 \Rightarrow frequenza f_0 Bit 1 \Rightarrow frequenza f_1 ($\Delta f = h/2T_b$)



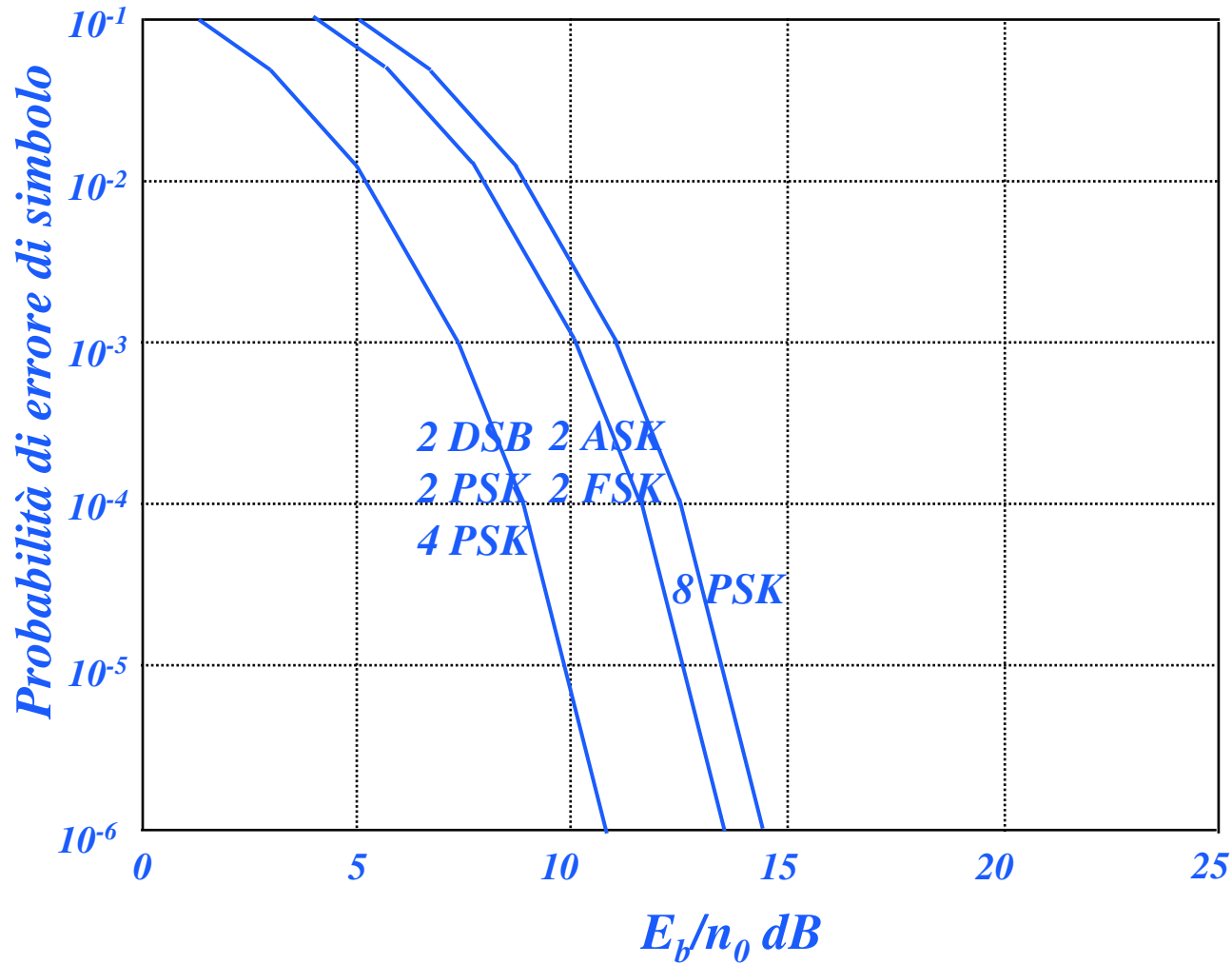
Modulazione 2 FSK

✓ *Occupazione di banda $B_{min} \approx 1.5/T_b = 1.5 f_b$ (per $h = 0.5$; in pratica leggermente maggiore).*

✓ *Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 13.5$ dB (la banda è una volta e mezzo maggiore quella del 2 PSK,, la potenza necessaria in ricezione è 2 volte maggiore).*

Per la sua semplicità, e per le prestazioni, tutto sommato, soddisfacenti, è stata ampiamente impiegata nei modem in banda fonica a bassa velocità

Modulazione 2 FSK



La modulazione 2 FSK richiede 3dB per il valore di E_b/n_0 rispetto alla modulazione 2 PSK (una potenza 2 volte maggiore), la banda è circa una 1.5 volte maggiore.

Modulazione QAM

Modulazione 16 QAM

La modulazione 16 QAM utilizza

✓ 3 diversi livelli di ampiezza e

✓ 12 diversi valori di fase

per rappresentare 16 possibili simboli, composti da 4 bit.

<i>Bit</i>	<i>ampiezza</i>	<i>fase</i>	<i>Bit</i>	<i>ampiezza</i>	<i>fase</i>
<i>0000</i>	$3A\sqrt{5}$	$\pi/4$	<i>1100</i>	$A\sqrt{5}$	$5\pi/4$
<i>0001</i>	A	0.4π	<i>1101</i>	A	1.1π
<i>0011</i>	$A\sqrt{5}$	$\pi/4$	<i>1111</i>	$3A\sqrt{5}$	$5\pi/4$
<i>0010</i>	A	0.1π	<i>1110</i>	A	1.4π
<i>0100</i>	A	0.6π	<i>1000</i>	A	1.6π
<i>0101</i>	$3A\sqrt{5}$	$3\pi/4$	<i>1001</i>	$A\sqrt{5}$	$7\pi/4$
<i>0111</i>	A	0.9π	<i>1011</i>	A	1.9π
<i>0110</i>	$A\sqrt{5}$	$3/4\pi$	<i>1010</i>	$3A\sqrt{5}$	$7\pi/4$

Modulazione 16 QAM

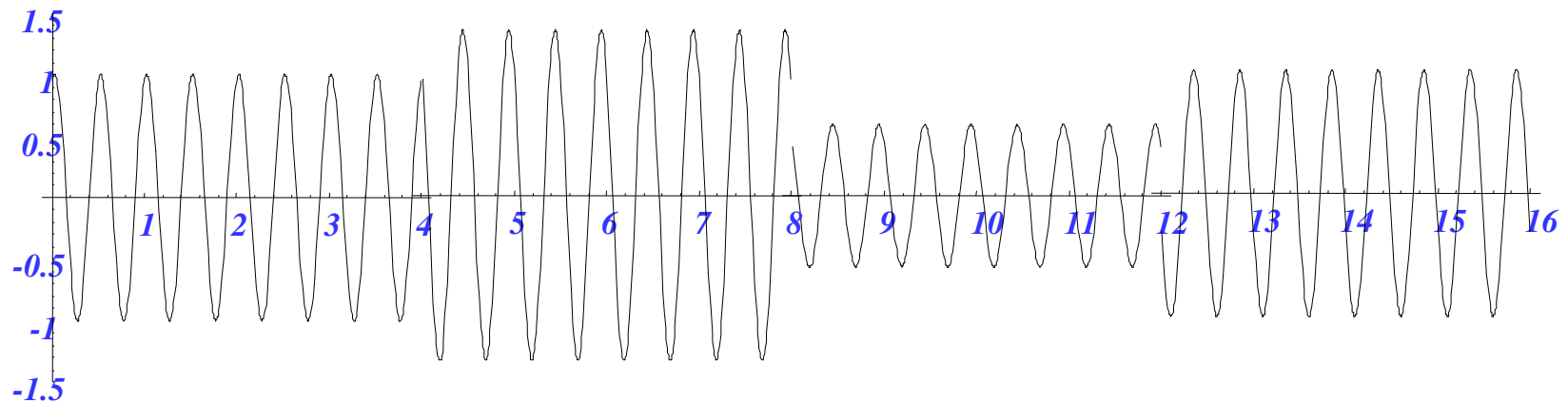
0001 1 0.4π

0101 $3/\sqrt{5}$ $3\pi/4$

0110 $1/\sqrt{5}$ $3\pi/4$

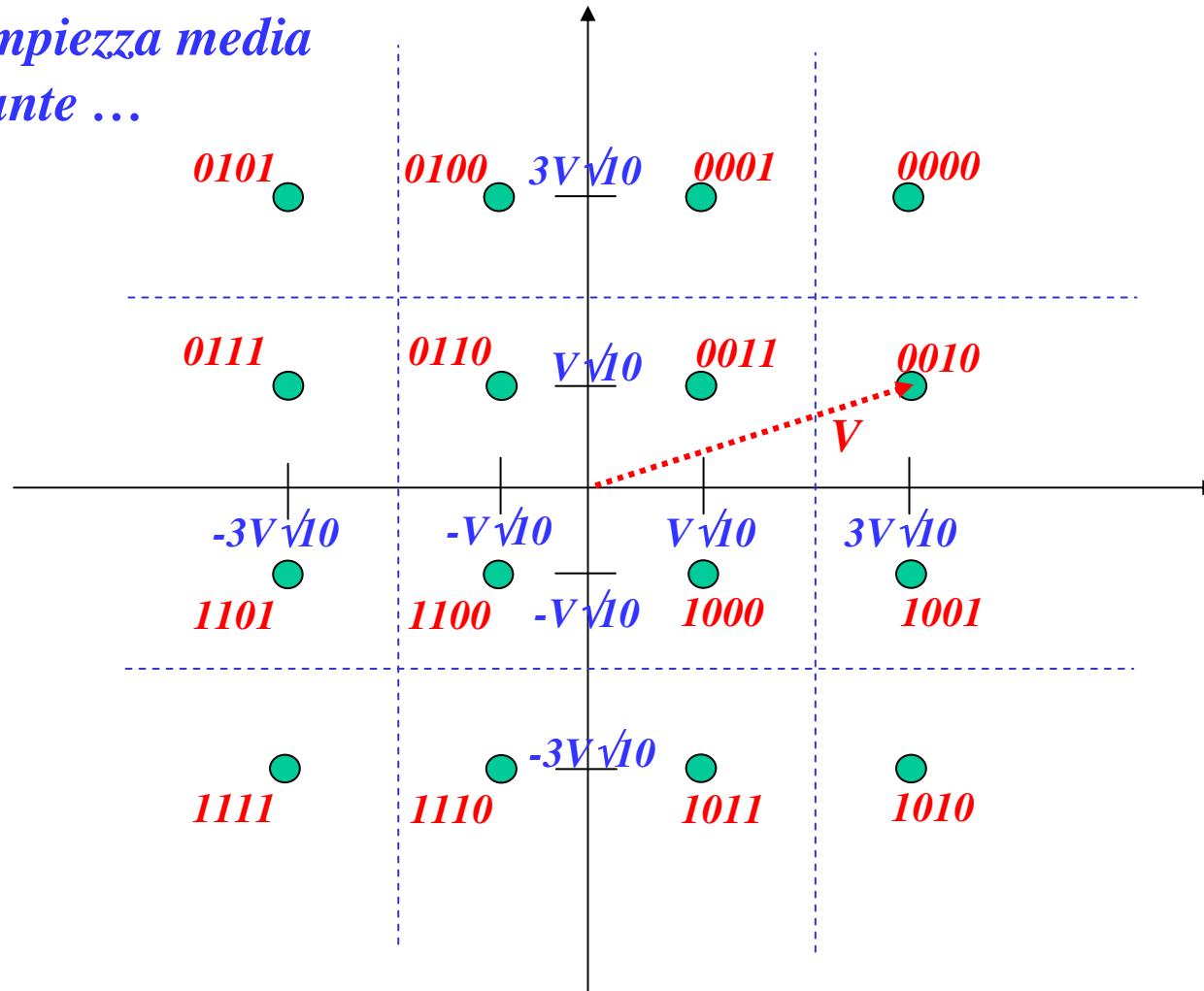
0111 1 1.1π

0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1



Modulazione 16 QAM

Se V é l'ampiezza media della portante ...



Modulazione 16 QAM

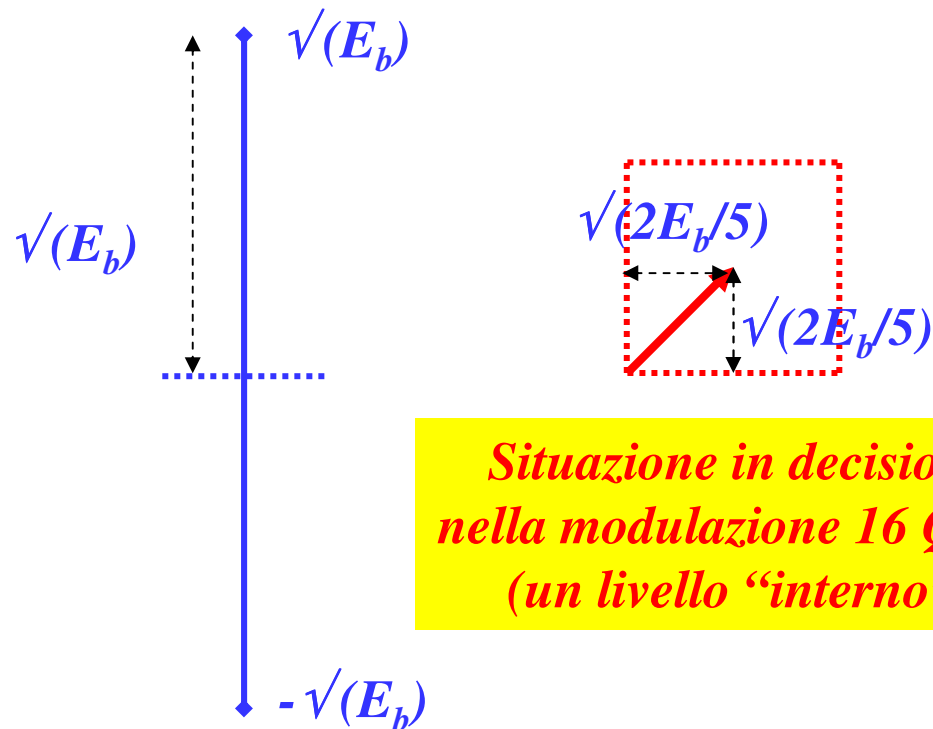
- ✓ *Occupazione di banda $B_{min} = 1/(4T_b) = f_b/4$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*
- ✓ *Rapporto E_b/n_0 @ $BER = 10^{-6} \approx 15$ dB (la banda è un quarto di quella del 2 PSK, la potenza necessaria in ricezione è 2.8 volte maggiore)*

➤ *Le modulazioni QAM (prevalentemente 16 QAM e 64 QAM) si utilizzano nei sistemi ove le bande in modulazione sono limitate, ma la potenza disponibile in ricezione sia relativamente alta, situazione tipica, ad esempio, dei ponti radio terrestri a microonde.*

➤ *In particolare, la 64 QAM ha 64 livelli, quindi 6 bit per simbolo trasmesso; la banda si riduce allora a $B_{min} = 1/(6T_b) = f_b/6$ (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore), la potenza necessaria in ricezione, rispetto al 2/4 PSK, è, però, ≈ 8 volte maggiore.*

3A

Modulazione 16 QAM

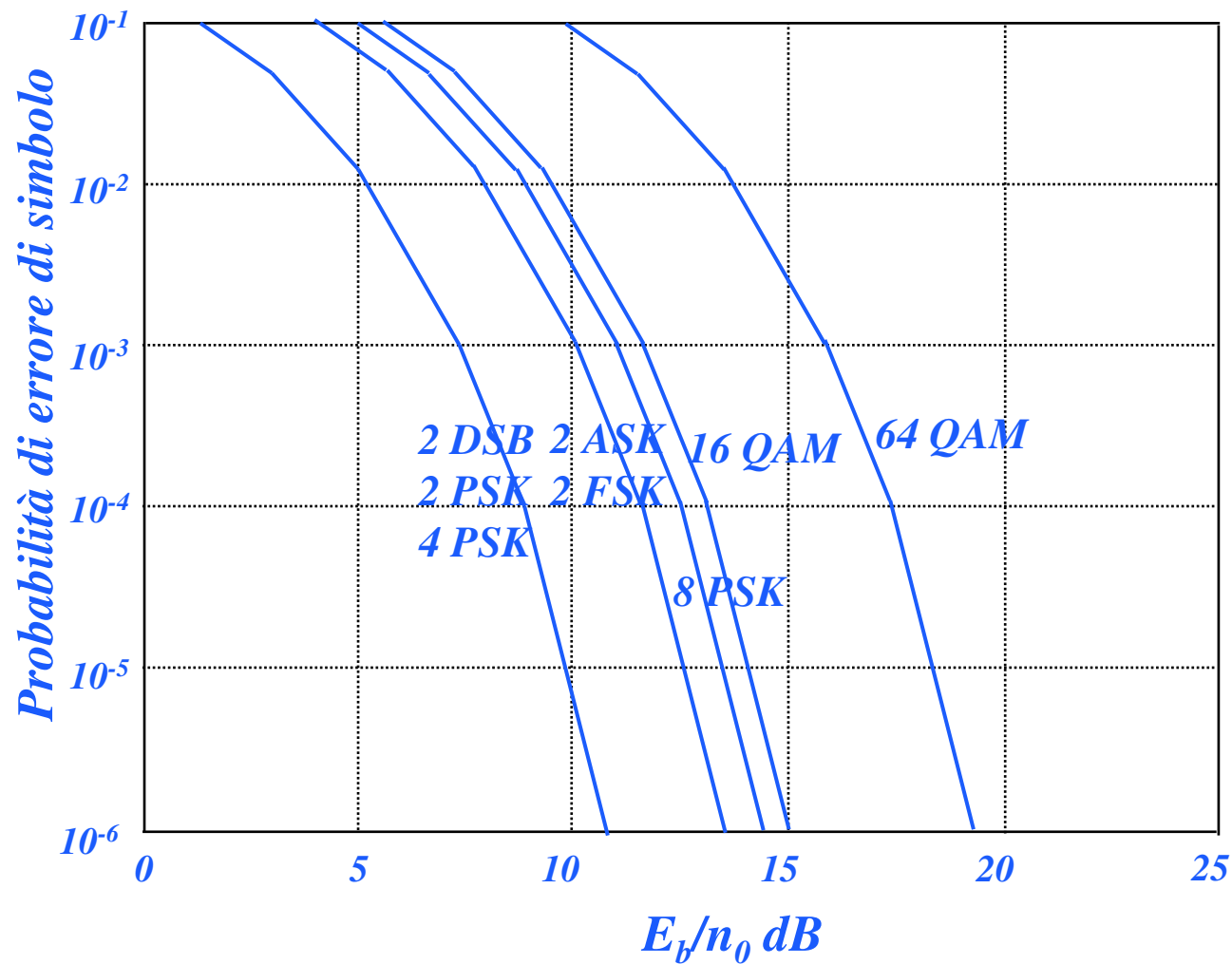


*Situazione in decisione
nella modulazione 16 QAM
(un livello “interno”)*

*Situazione in decisione
nella modulazione 2 PSK*

La modulazione 16 QAM richiede circa 4.5 dB per il valore di E_b/n_0 rispetto alla modulazione 2 PSK (una potenza 2.8 volte maggiore), ma la banda è 1/4.

Modulazione 16 QAM e 64 QAM



La modulazione 16 (64) QAM richiede 3.5 dB (9 dB) in più per il valore di E_b/n_0 rispetto alla modulazione 2 PSK, cioè una potenza 2.8 (8) volte maggiore, ma la banda è circa $1/4$ ($1/6$).