

# *La modulazione numerica*

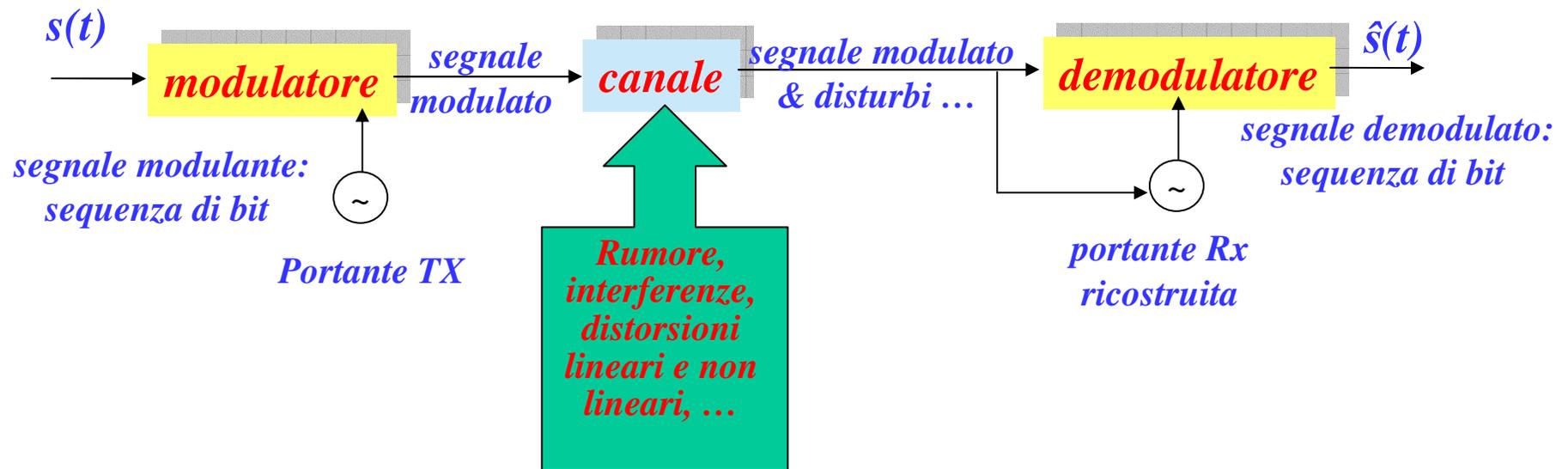
*Mauro Giaconi*

# *Principi di modulazione numerica*

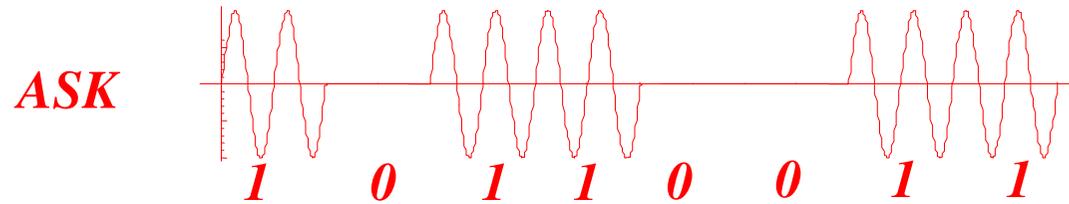
# Modulazione numerica

- La modulazione “*trasla*” l’informazione di banda base in *banda traslata*;
- *bit o gruppi di bit da trasmettere sono associati a variazioni discrete dei parametri della portante trasmessa (ampiezza, fase o frequenza), così che il ricevitore possa ricostruirli a partire dalla portante modulata ricevuta (il rumore o le interferenze possono provocare errori in decisione).*

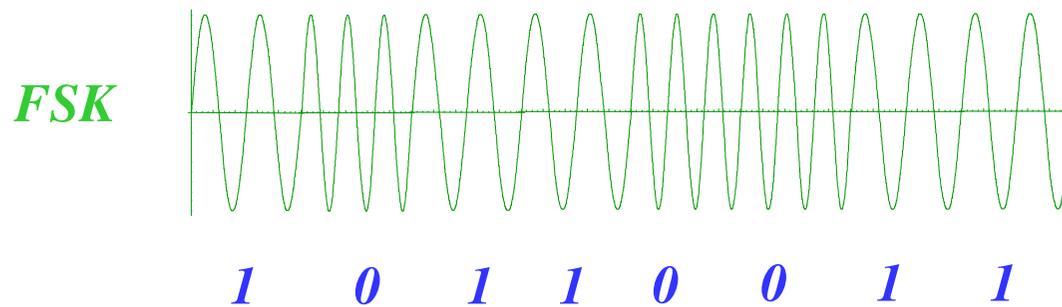
*Mo-demodulazione coerente (il ricevitore ricostruisce la portante non modulata, come riferimento per la rivelazione)*



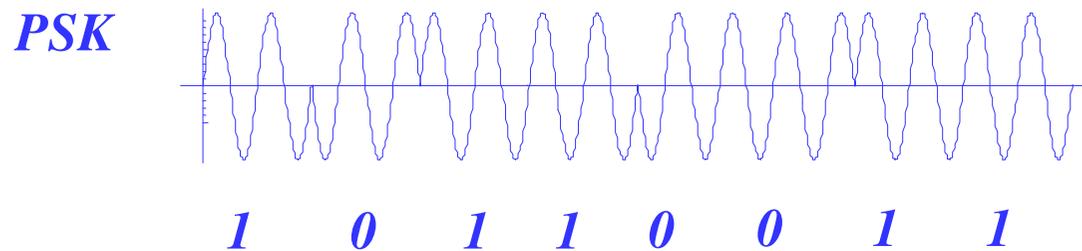
## *Le modulazioni numeriche - esempio binario: $s(t) = \{0,1\}$*



*Amplitude Shift Keying*  
*ampiezza:  $A = A(s(t))$*

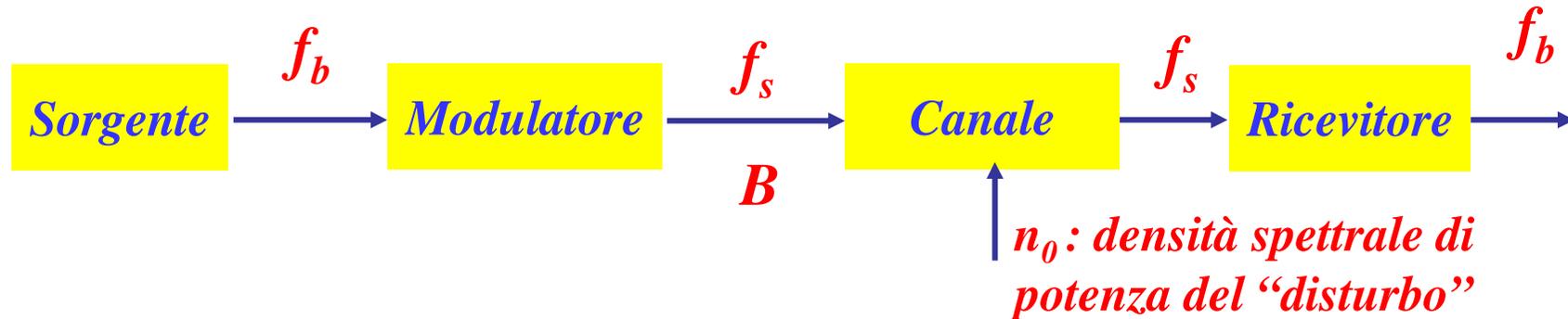


*Frequency Shift Keying*  
*frequenza:  $f_0 = f(s(t))$*



*Phase Shift Keying*  
*fase:  $\phi = \phi(s(t))$*

## *l'occupazione di banda del segnale modulato*

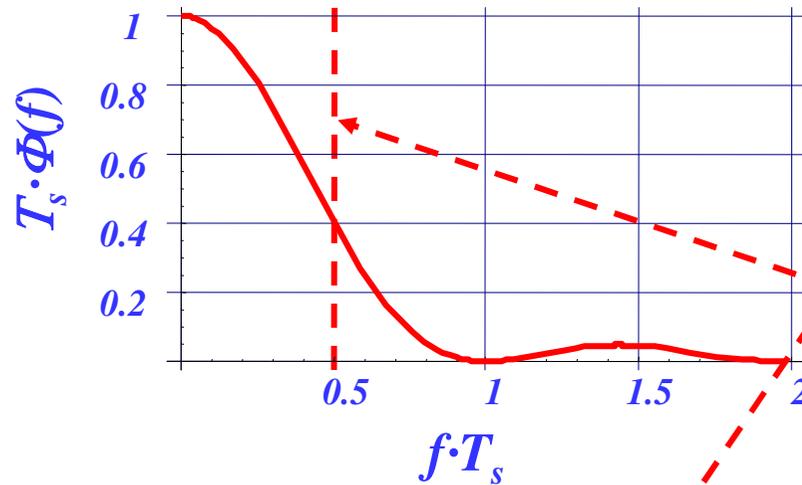


- *La sorgente emette simboli binari con rate  $f_b$  (bit/s);*
- *il modulatore emette, con frequenza di “simbolo”  $f_s$  (simboli/s) un “segnale” scelto tra  $M$  disponibili (più propriamente, scelto tra  $M$  variazioni discrete di ampiezza, di fase o di frequenza), associandolo a gruppi di simboli binari costituiti da  $\log_2 M$  bit;*
- *ad esempio: con  $M = 16$  “segnali”,  $f_s = f_b / \log_2 M$ , ovvero  $f_s = (1/4)f_b$ .*

## *l'occupazione di banda del segnale modulato*

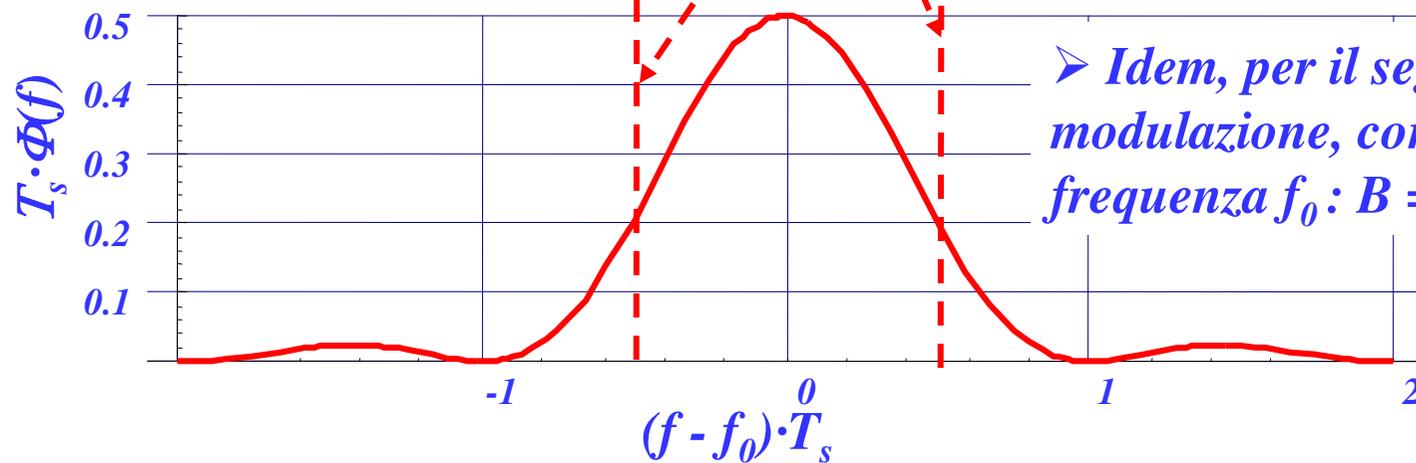
- *Lo spettro (di potenza) in banda traslata del segnale modulato è pari, per le modulazioni “lineari” (ASK, DSB, PSK, QAM), alla **traslazione** nell’intorno della portante (a “destra” e a “sinistra” di essa: le due “semibande” di modulazione) dello spettro (di potenza) di banda base;*
- *per tali modulazioni “lineari”, l’occupazione di banda  $B$  è legata direttamente alla frequenza di simbolo: la banda minima è  $B_{min} = 2 \cdot f_N = f_s$  essendo  $f_N$  la metà della frequenza di simbolo, a sua volta pari a  $f_b / \log_2 M$ , essendo  $M$  il numero dei simboli (in realtà, la banda effettiva è più o meno estesa - ad esempio  $+10\% \div +20\%$  - rispetto a tale valore minimo);*
- *per le modulazioni di frequenza (FSK e, anche, per la modulazione GMSK del GSM), lo spettro in modulazione non è, invece, riconducibile a tale, semplice, traslazione spettrale, come accennato nel seguito.*

## *l'occupazione di banda del segnale modulato*



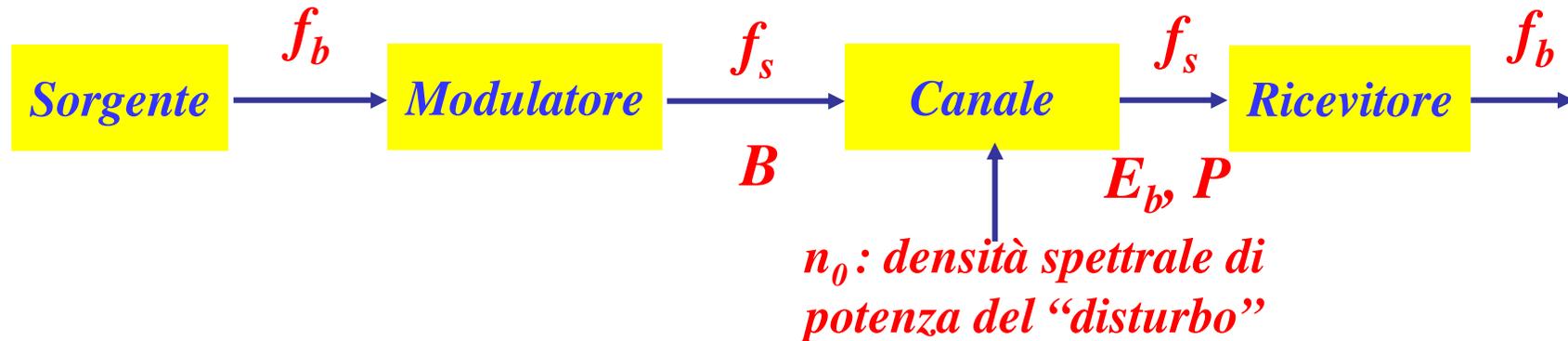
➤ *Spettro del segnale di banda base, non filtrato, relativa ai “simboli”, con tempo di simbolo  $T_s$ ;*

➤ *é indicata anche la banda minima (teorica) in banda base,  $B = 1/(2T_s)$ .*



➤ *Idem, per il segnale in modulazione, con portante a frequenza  $f_0$ :  $B = 1/(T_s)$ .*

## Potenza e energia media



*L'energia media di simbolo è uguale alla potenza media moltiplicata per il tempo di segnalazione di simbolo (gruppo di bit a cui è associata una variazione elementare della portante: ampiezza, fase o frequenza);  $E_s = P \cdot T_s = P/f_s$ ;*

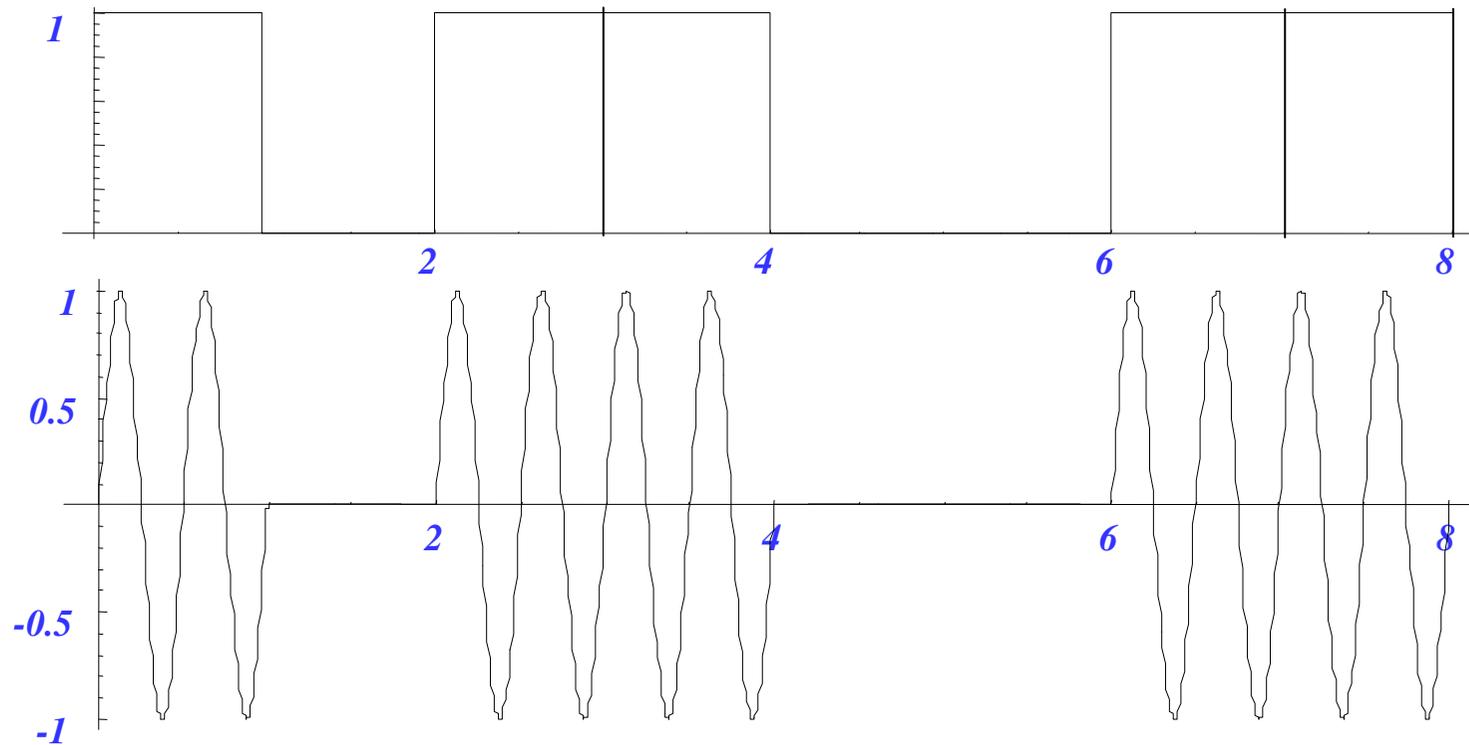
*L'energia media di bit è uguale alla potenza media moltiplicata per il tempo di bit;  $E_b = P \cdot T_b = P/f_b$ ; quindi,  $E_s = E_b f_b / f_s$ .*

# *Modulazione di ampiezza*

# *Modulazione di ampiezza 2 ASK (Amplitude Shift Keying)*

*Bit 0  $\Rightarrow$  ampiezza 0*

*Bit 1  $\Rightarrow$  ampiezza  $V$*



## *Modulazione di ampiezza 2 ASK*



- ✓ *Occupazione di banda  $B_{min} = 1/T_b = f_b$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*
- ✓ *Rapporto  $E_b/n_0$  @ BER =  $10^{-6} \approx 13.5$  dB*

*Questa modulazione, denominata anche OOK (On Off Keying) è stata fra le prime impiegate nei ponti radio terrestri.*

## *Modulazione di ampiezza 2 ASK - rigenerazione*

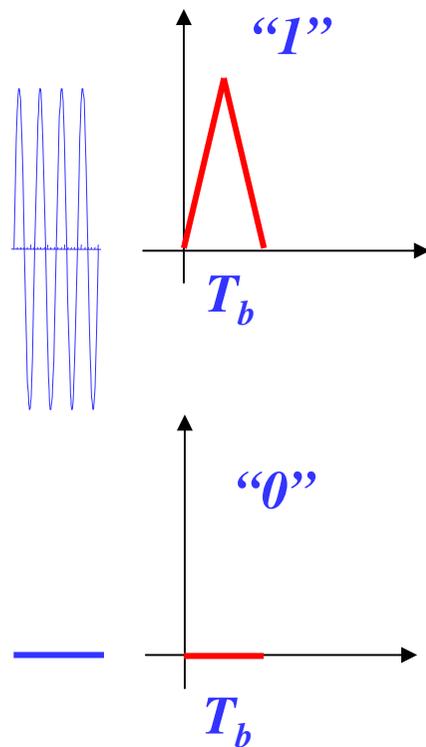
*Al ricevitore, il segnale utile assume i due valori  $\sqrt{2 E_s} = \sqrt{2 E_b} = \sqrt{2 P \cdot T_b}$  o 0, a seconda del valore del simbolo trasmesso.*

*Il rumore in decisione ha potenza (valore quadratico medio)  $N_D = \sigma^2 = n_0/2$ , ove  $n_0$  è la densità spettrale del rumore (ad esempio, per il rumore termico,  $n_0 = -144 \text{ dBm/kHz} + F \text{ dB}$ ,  $F$  cifra di rumore del ricevitore).*

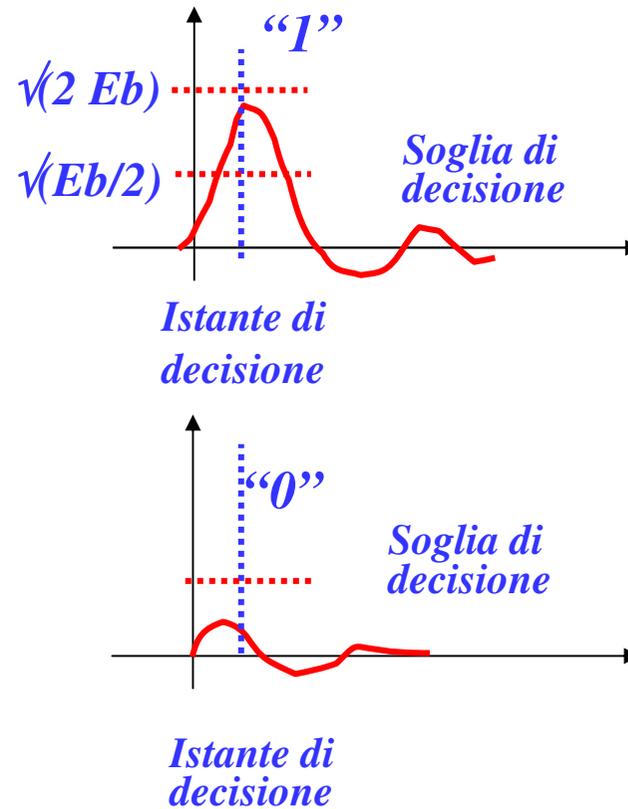
*Il ricevitore pone una soglia a metà dei segnali utili ricevuti e decide in funzione dell'effettivo valore del segnale più rumore ricevuto.*

# Modulazione di ampiezza 2 ASK - rigenerazione

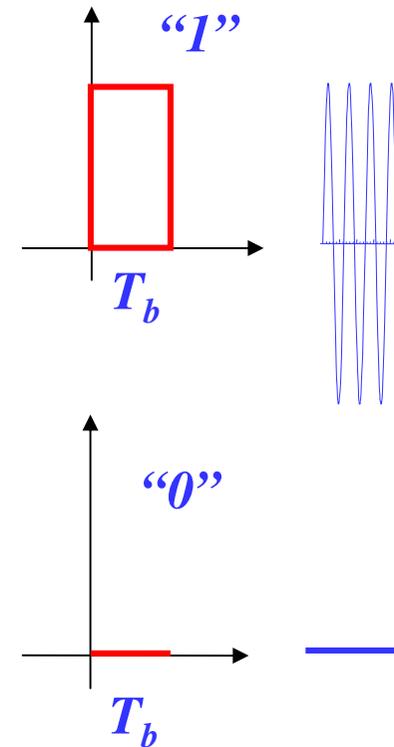
Segnali “nominali”  
(filtrati) in ricezione



Segnali + rumore effettivi  
(filtrati) in ingresso al decisore

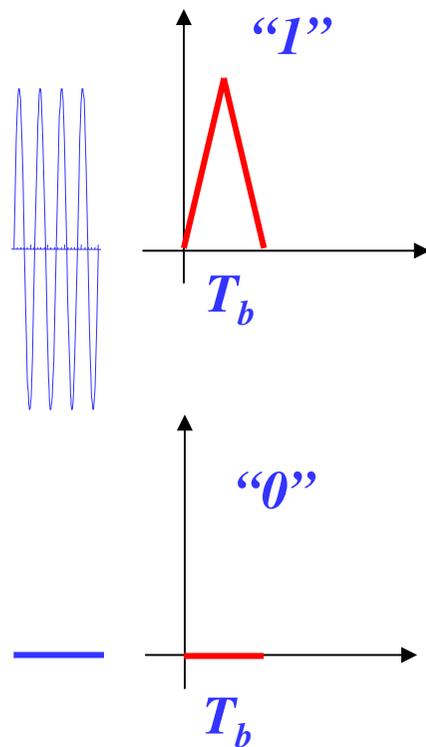


Segnali “rigenerati”  
corretti

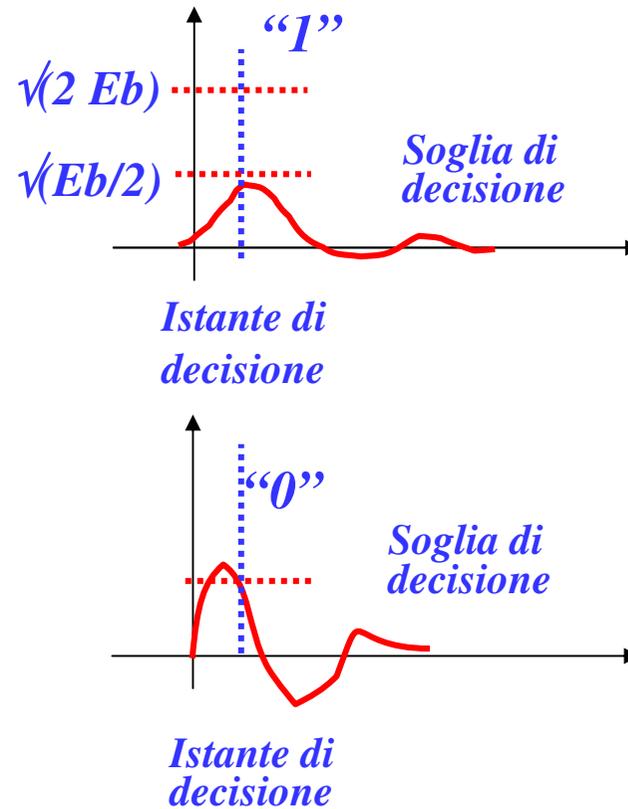


# Modulazione di ampiezza 2 ASK - rigenerazione

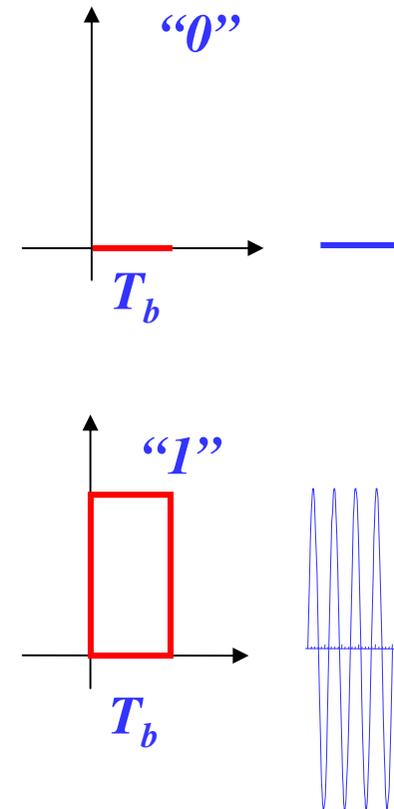
Segnali "nominali"  
(filtrati) in ricezione



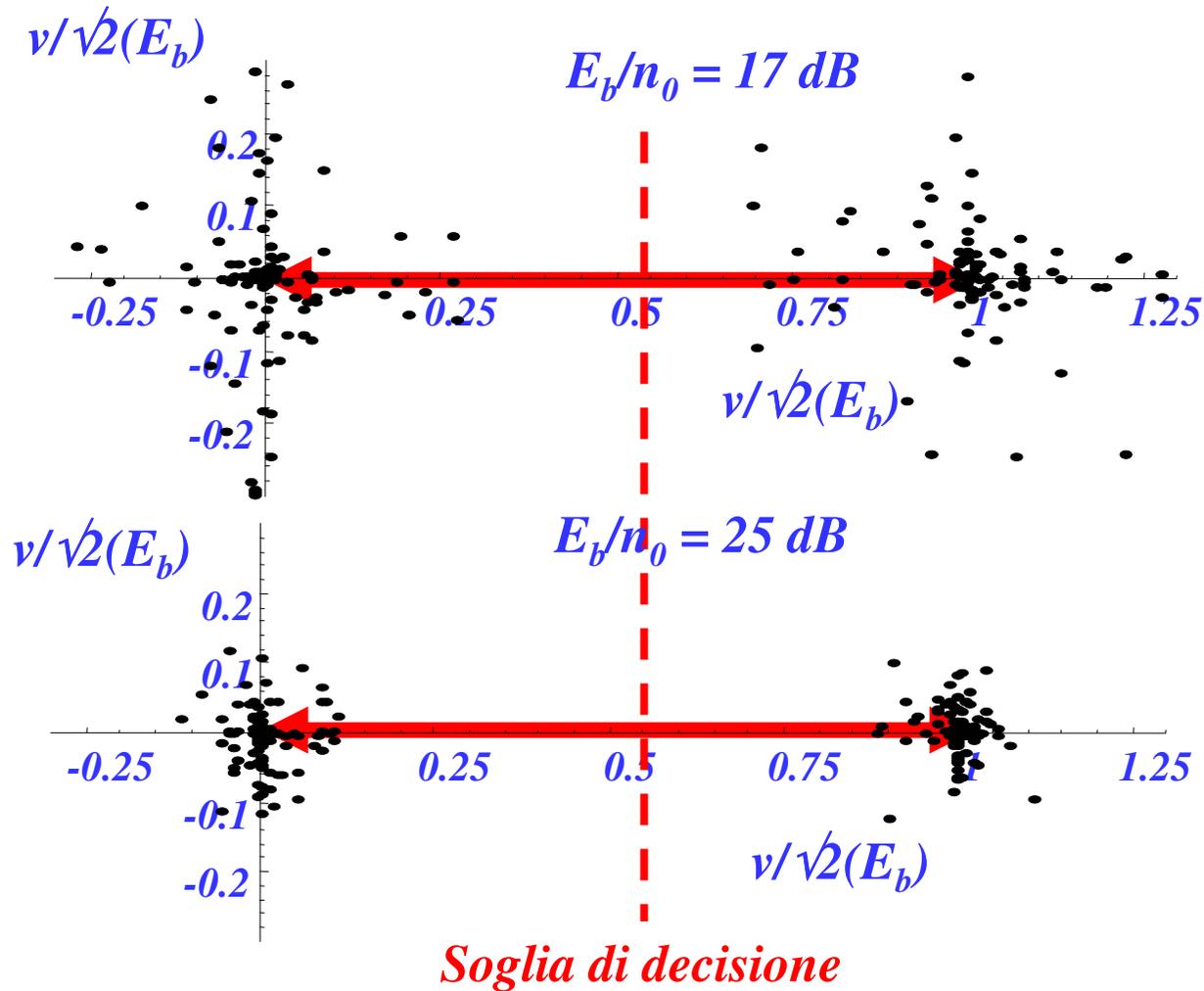
Segnali + rumore effettivi  
(filtrati) in ingresso al decisore



Segnali "rigenerati"  
errati



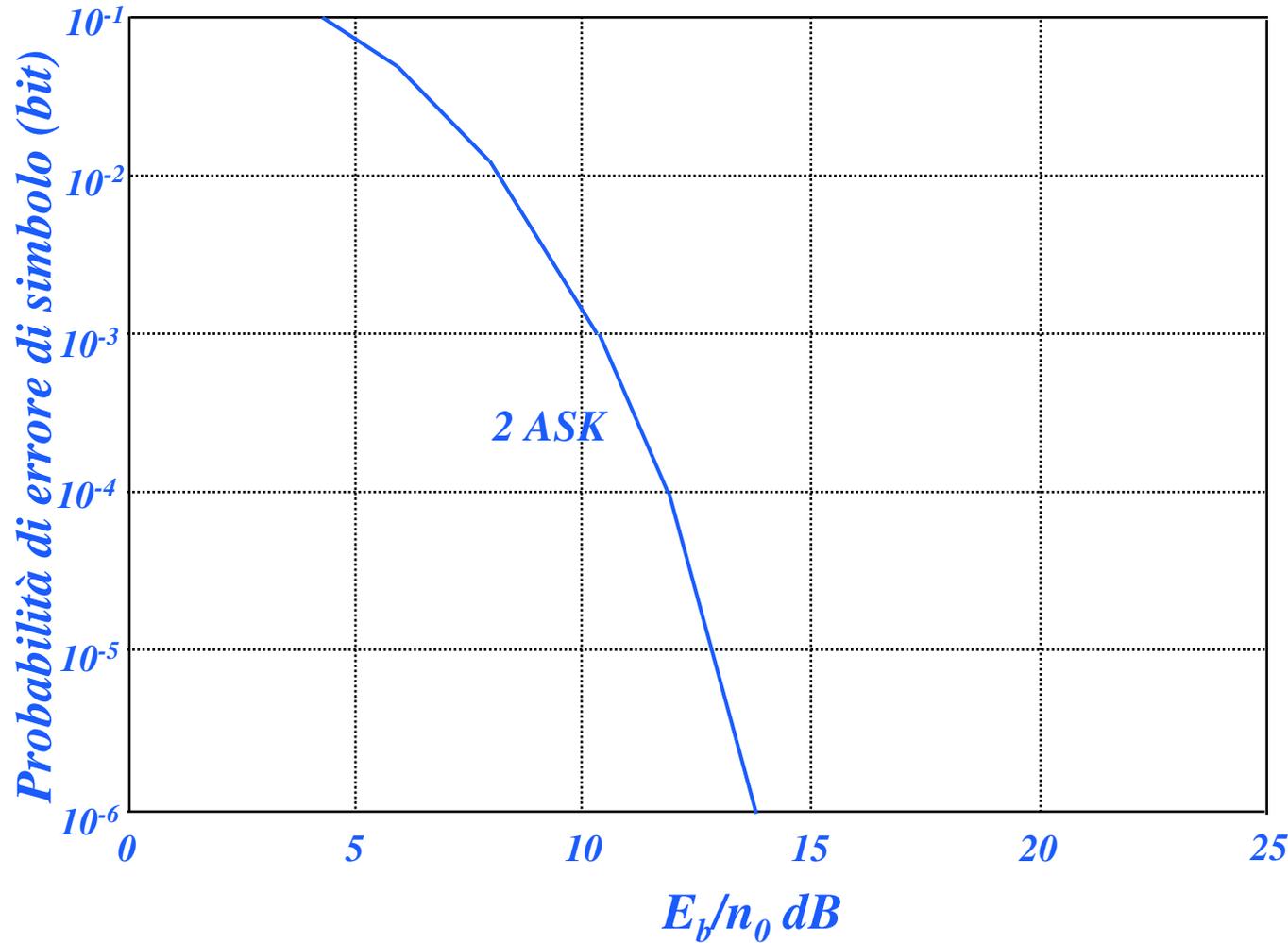
## Modulazione di ampiezza 2 ASK



*Segnali + rumore  
effettivi (filtrati)  
in ingresso al  
decisore,  
nell'istante di  
decisione*

*Il rumore causa  
una probabilità di  
errore crescente  
al diminuire del  
rapporto S/N,  
segnale rumore*

## 2 ASK - probabilità di errore di simbolo (bit)



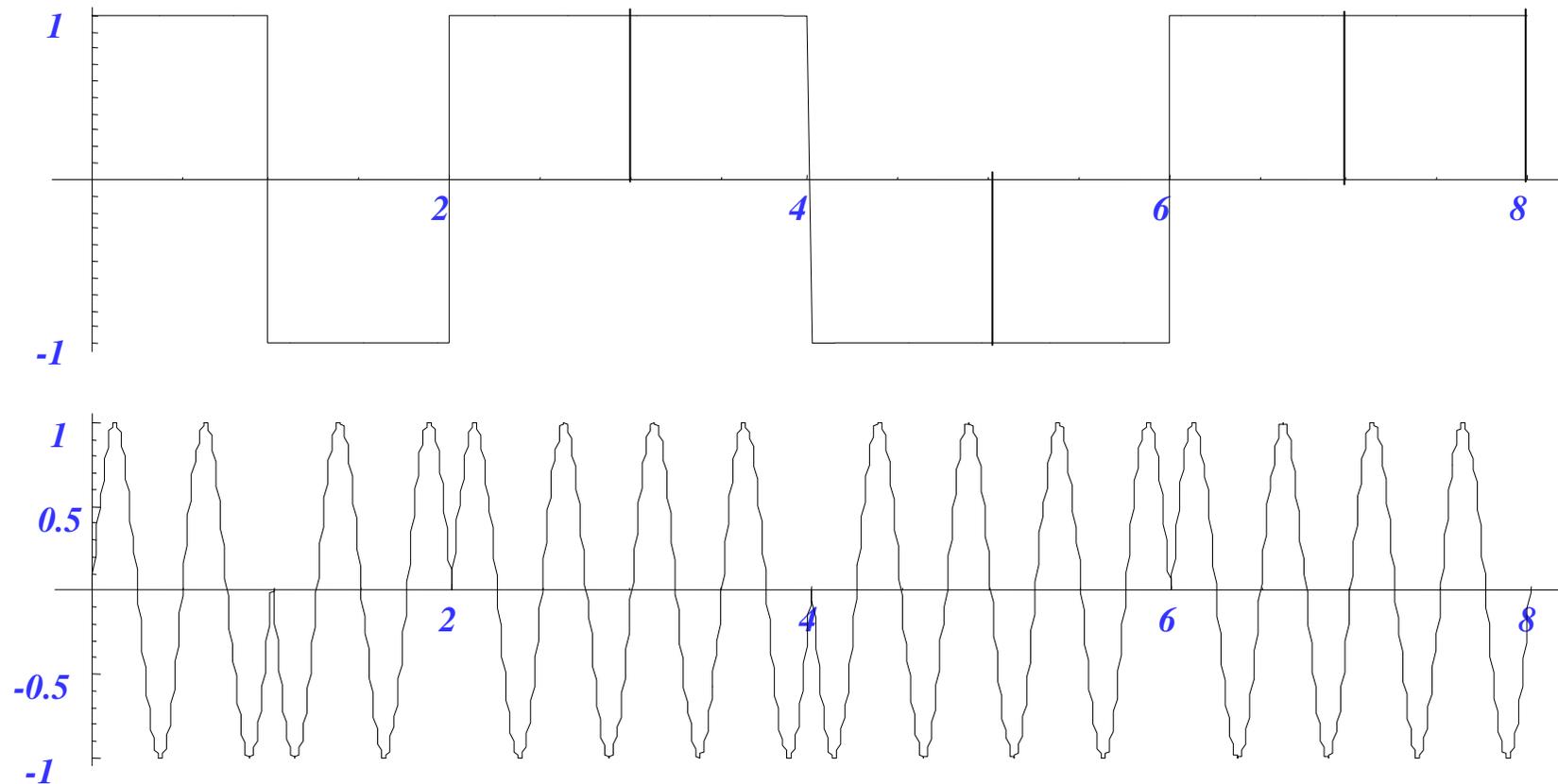
Il BER è indicato in funzione del rapporto segnale rumore espresso dal parametro  $E_b/n_0$ .

$$\begin{aligned} \frac{E_b}{n_0} &= \frac{S T_b}{N} = \frac{S T_b}{N} \\ &= \frac{S T_b}{T_b N} = \frac{S}{N} \end{aligned}$$

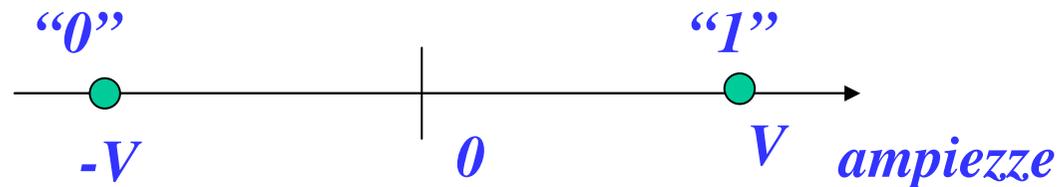
# *Modulazione di ampiezza 2 DSB (Double Side Band)*

*Bit 0  $\Rightarrow$  ampiezza  $-V$*

*Bit 1  $\Rightarrow$  ampiezza  $V$*

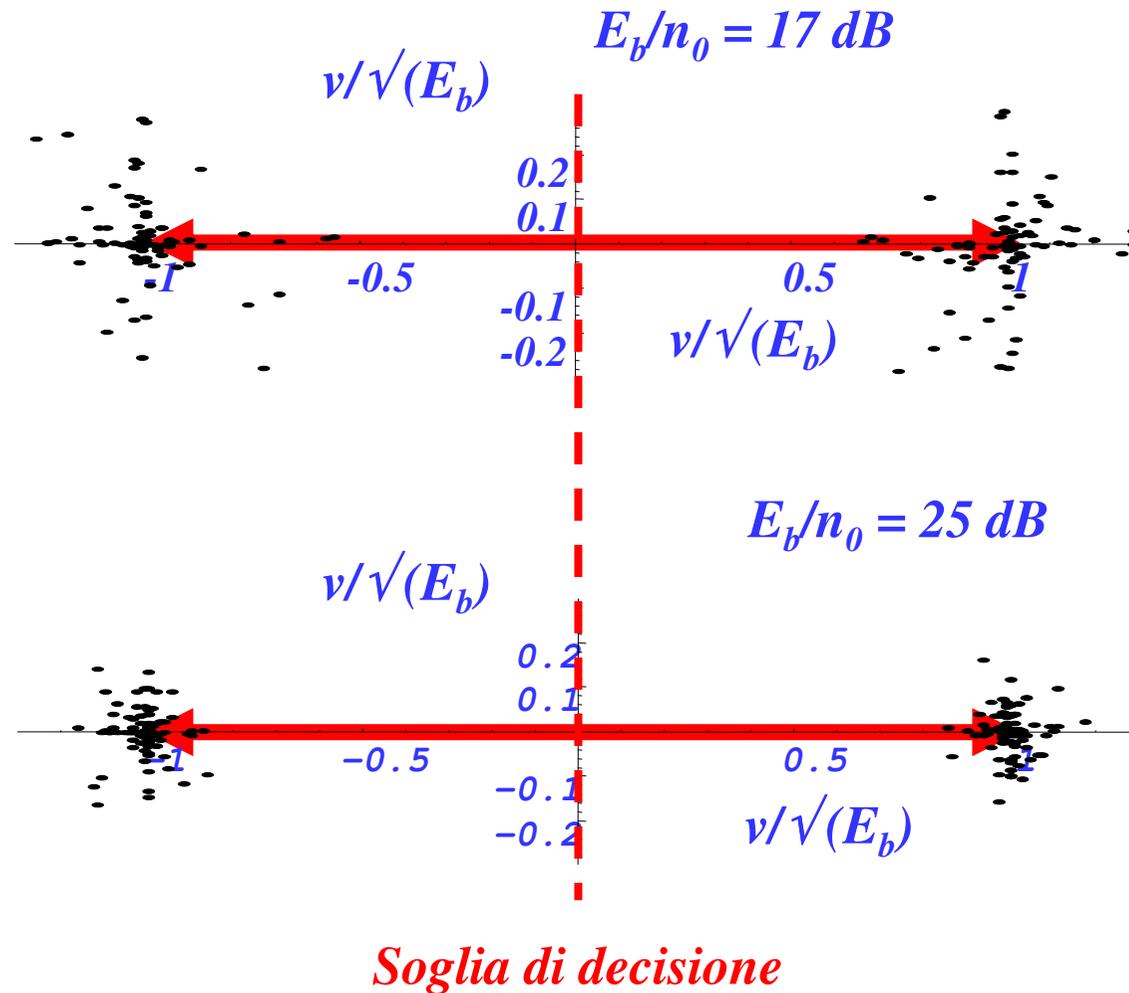


## *Modulazione di ampiezza 2 DSB*



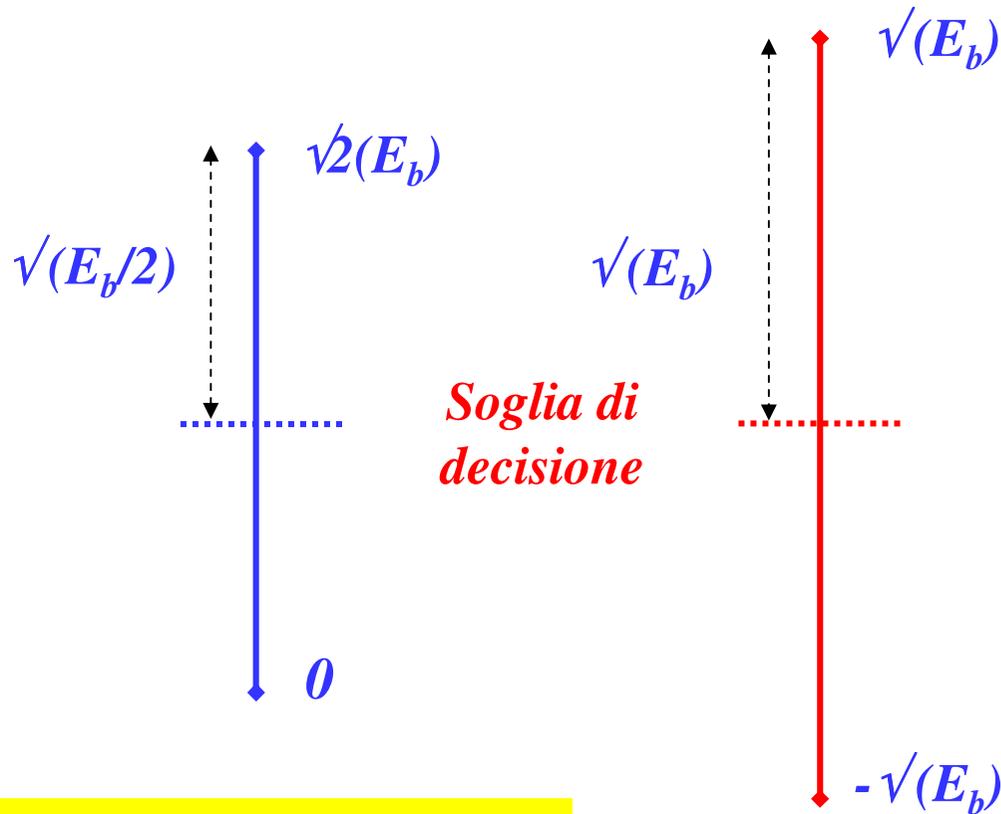
- ✓ *Occupazione di banda  $B_{min} = 1/T_b = f_b$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*
- ✓ *Rapporto  $E_b/n_0$  @  $BER = 10^{-6} \approx 10.5$  dB*
- ✓ *La modulazione 2 DSB, che utilizza segnali positivi e negativi, occupa la stessa banda della 2 ASK, assicurando la stessa probabilità di errore con metà del valore del rapporto  $E_b/n_0$  rispetto alla modulazione ASK (quindi, con metà potenza in ricezione).*

## Modulazione di ampiezza 2 DSB



*E' evidente, a parità di valore del rapporto segnale rumore, il vantaggio della modulazione 2 DSB rispetto a quella 2 ASK.*

# Modulazione di ampiezza 2 DSB

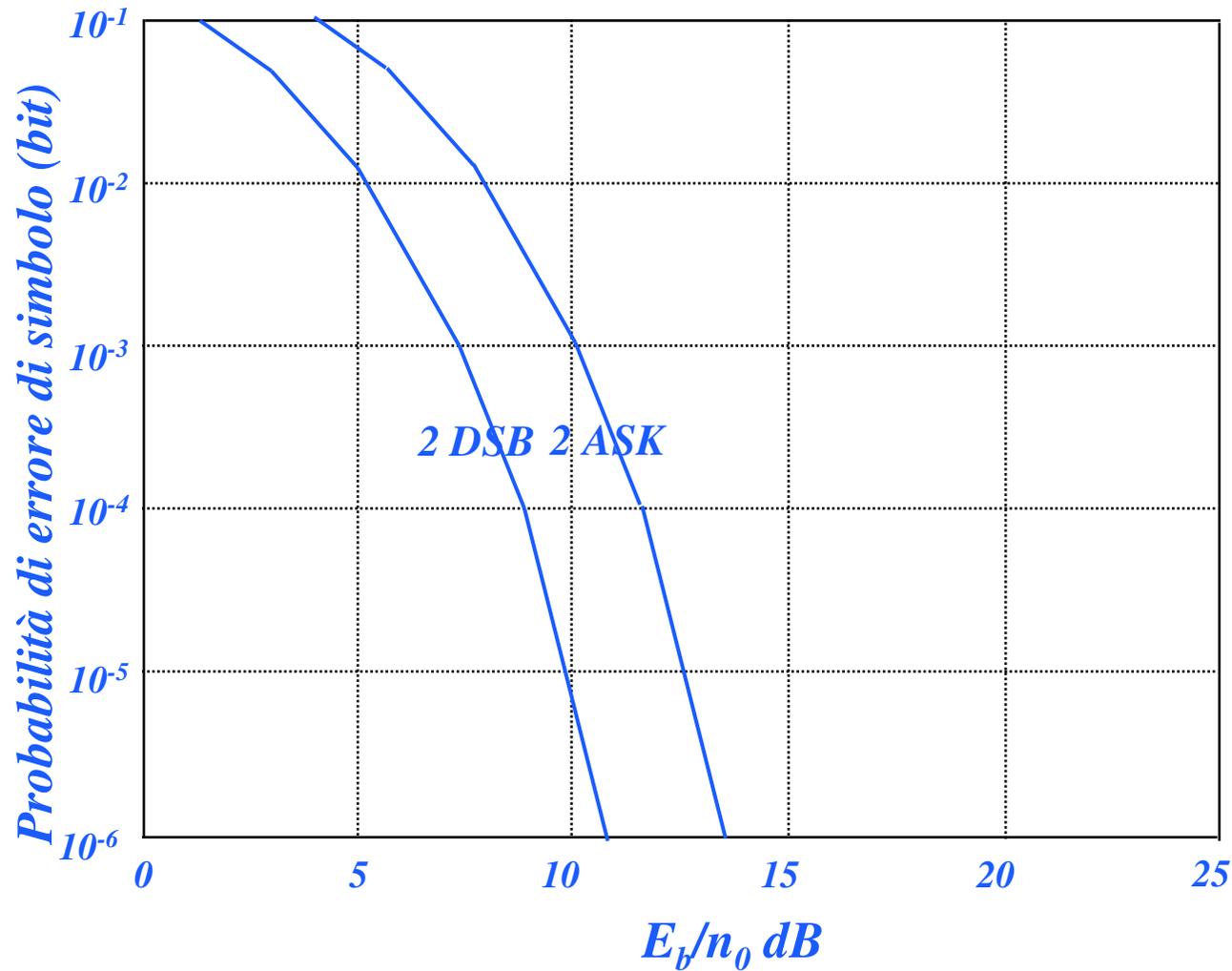


*La modulazione 2 DSB ha un vantaggio in termini di potenza di 3 dB rispetto alla modulazione 2 ASK*

*Situazione in decisione nella modulazione 2 ASK*

*Situazione in decisione nella modulazione 2 DSB*

## *2 DSB - probabilità di errore di simbolo (bit)*



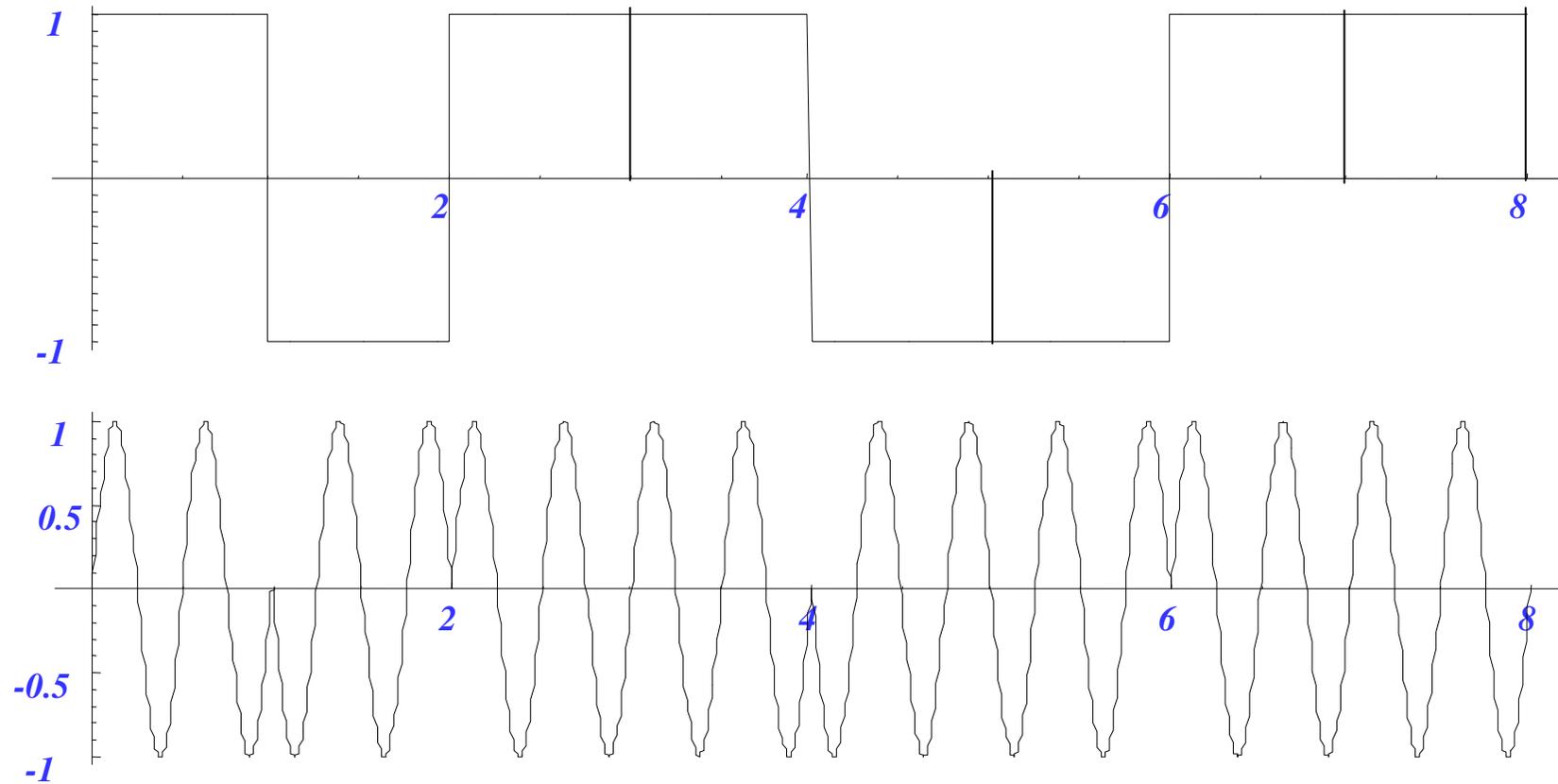
*La modulazione 2 DSB ha un vantaggio in termini di potenza di 3 dB rispetto alla modulazione 2 ASK, a parità di banda in modulazione.*

# *Modulazione PSK*

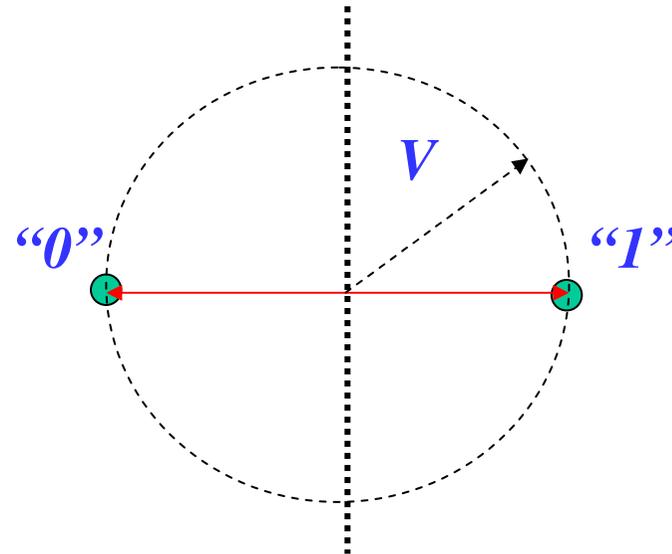
# *Modulazione 2 PSK (= 2 DSB)*

*Bit 0  $\Rightarrow$  fase 0*

*Bit 1  $\Rightarrow$  fase  $\pi$  ( $180^\circ$ )*



## *Modulazione 2 PSK (= 2 DSB)*

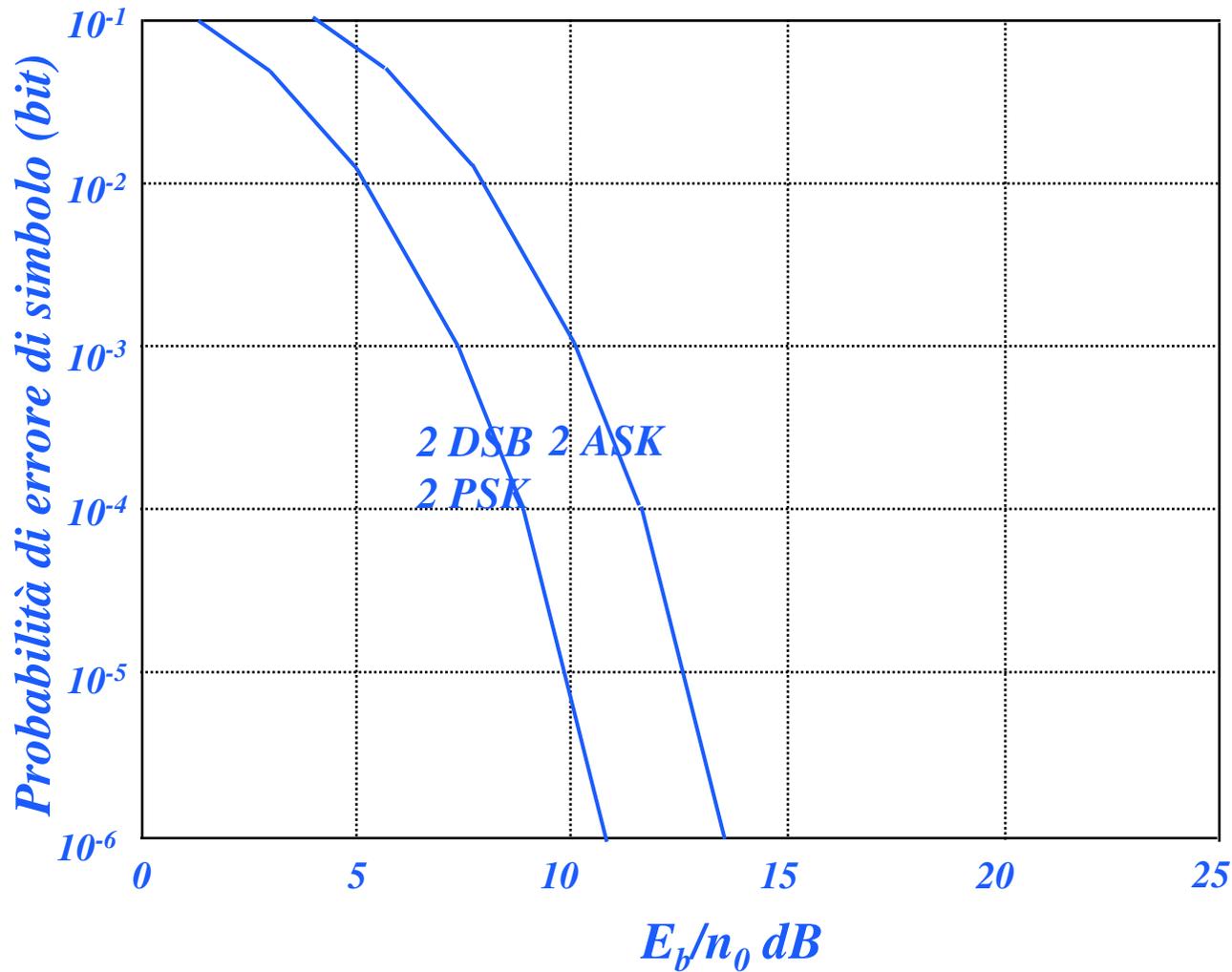


✓ *Occupazione di banda  $B_{min} = 1/T_b = f_b$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*

✓ *Rapporto  $E_b/n_0$  @  $BER = 10^{-6} \approx 10.5$  dB (concettualmente almeno, la modulazione 2 PSK ha prestazioni identiche alla 2 DSB)*

*La modulazione 2 PSK é stata fra le prime modulazioni numeriche utilizzate nei modem e nei ponti radio*

## *2 PSK - probabilità di errore di simbolo (bit)*



*La modulazione 2 PSK ha un vantaggio in termini di potenza di 3 dB rispetto alla modulazione 2 ASK, a parità di banda in modulazione.*

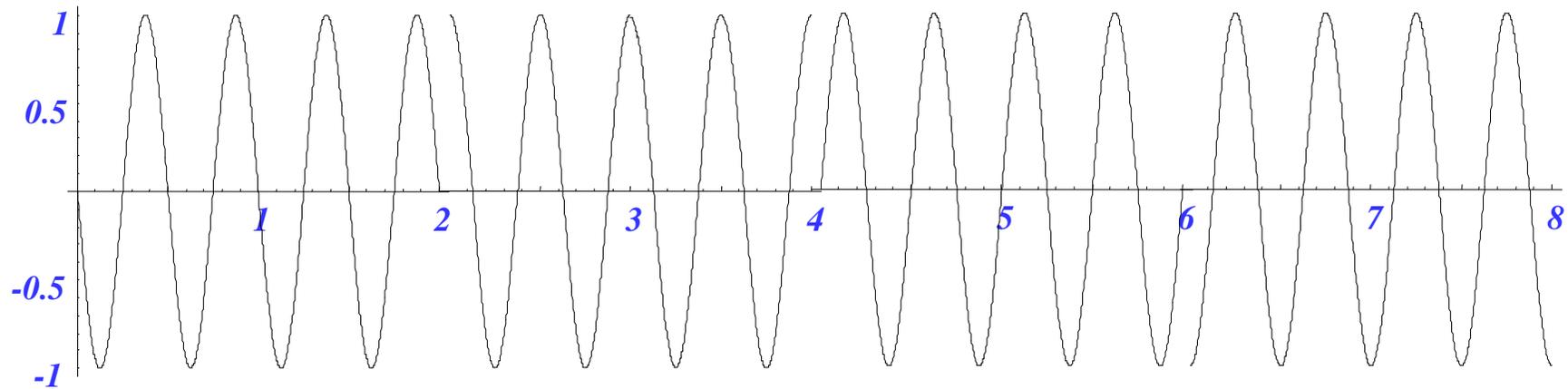
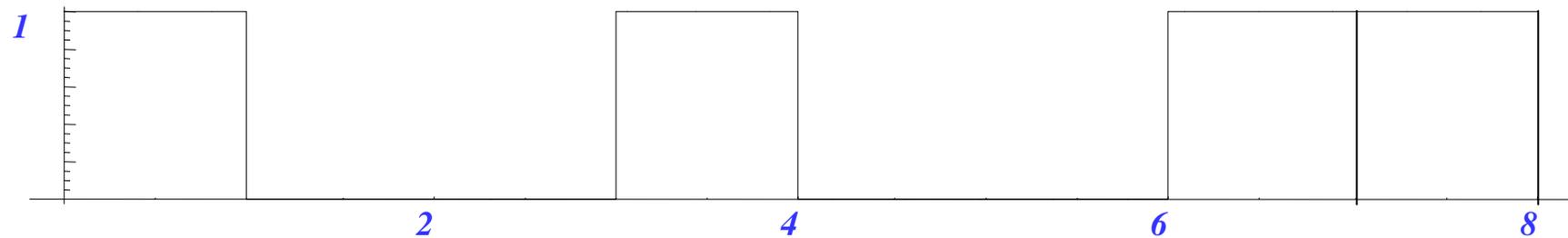
# *Modulazione 4 PSK*

*Bit 00  $\Rightarrow$  fase 0*

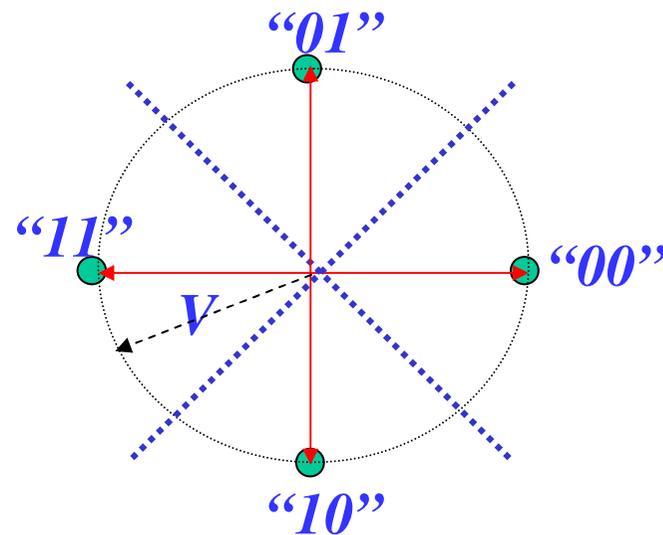
*Bit 01  $\Rightarrow$  fase  $\pi/2$  ( $90^\circ$ )*

*Bit 11  $\Rightarrow$  fase  $\pi$  ( $180^\circ$ )*

*Bit 10  $\Rightarrow$  fase  $3\pi/2$  ( $270^\circ$ )*



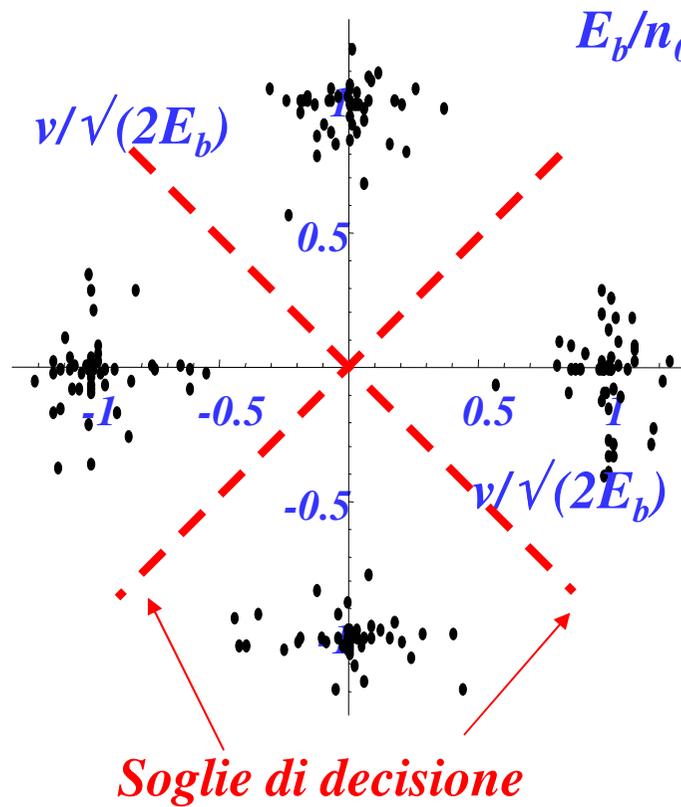
## Modulazione 4 PSK



- ✓ Occupazione di banda  $B_{min} = 1/2T_b = f_b/2$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)
- ✓ Rapporto  $E_b/n_0$  @  $BER = 10^{-6} \approx 10.5$  dB (la potenza in ricezione è la stessa di quella necessaria nel 2 PSK, ma la banda è la metà di quella del 2 PSK, quindi vi è un vantaggio evidente nell'impiego della modulazione 4 PSK rispetto alla modulazione 2 PSK)

*E utilizzata nei sistemi radio terrestri e via satellite, e nei sistemi radiomobili, dove le condizioni di propagazione sono gravose.*

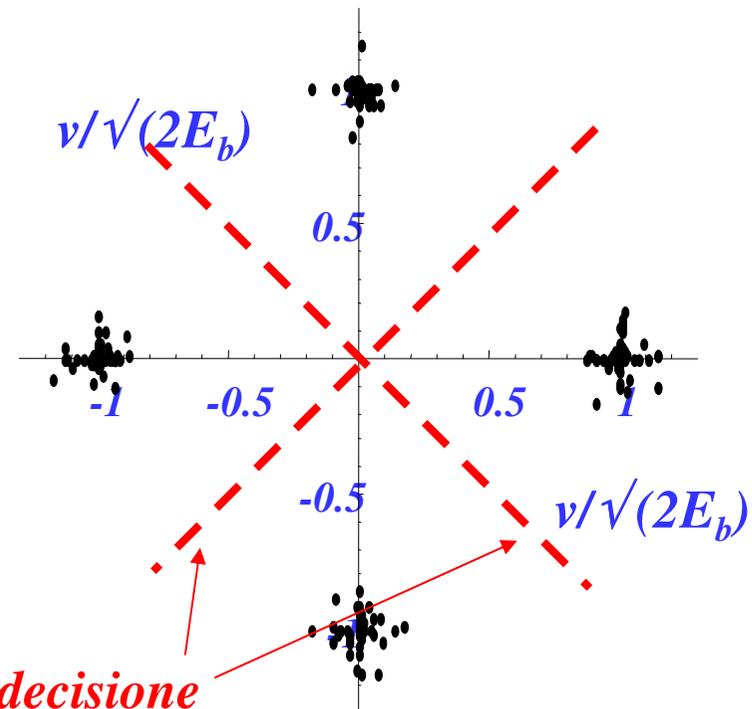
# Modulazione 4 PSK



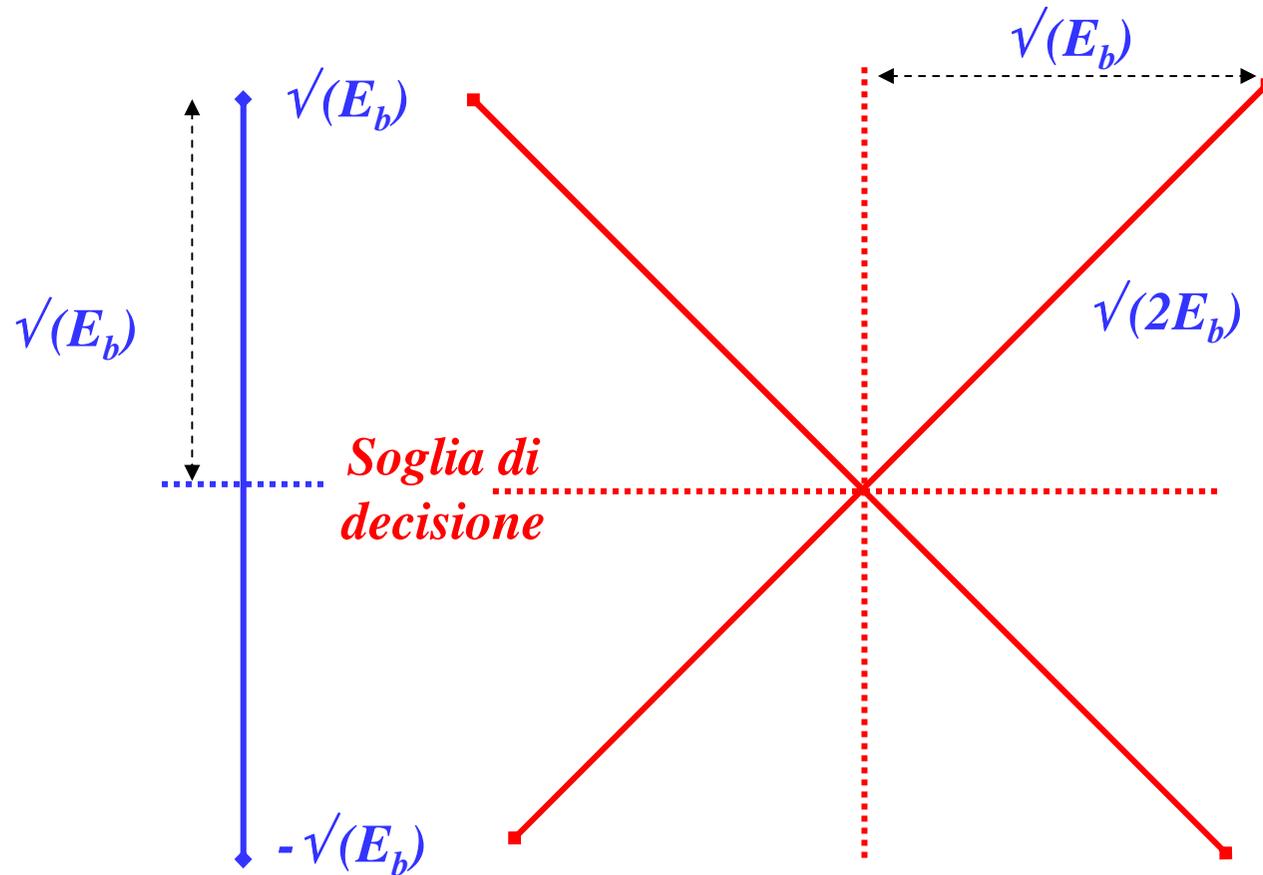
$E_b/n_0 = 25 \text{ dB}$

*Soglie di decisione*

*E' abbastanza evidente, a parità di valore del rapporto segnale rumore, l'equivalenza delle modulazioni 2 PSK e 4 PSK*



# Modulazione 4 PSK

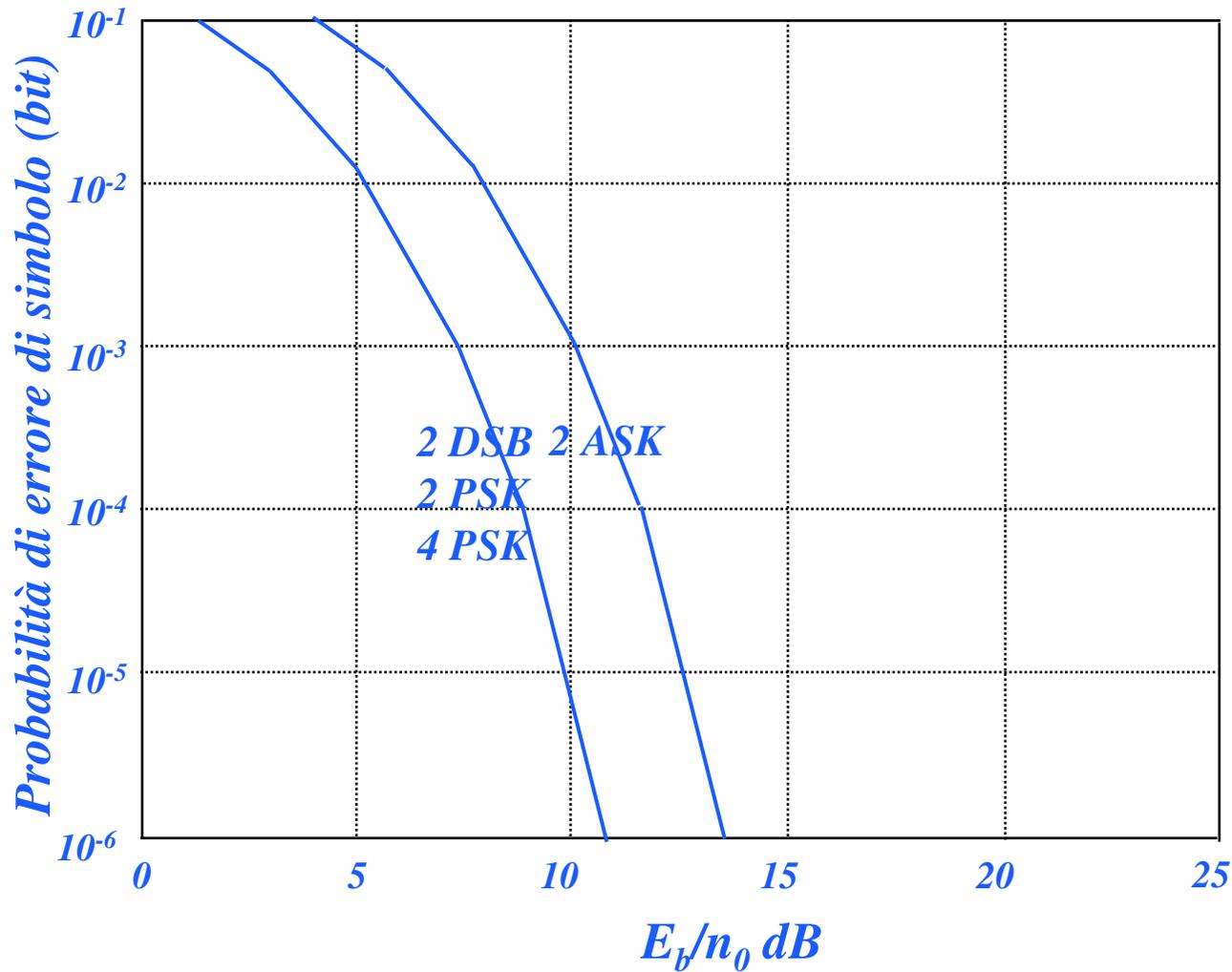


*La modulazione 4 PSK ha le stesse prestazioni in termini di  $E_b/n_0$  della modulazione 2 PSK*

*Situazione in decisione nella modulazione 2 DSB / 2 PSK*

*Situazione in decisione nella modulazione 4 PSK*

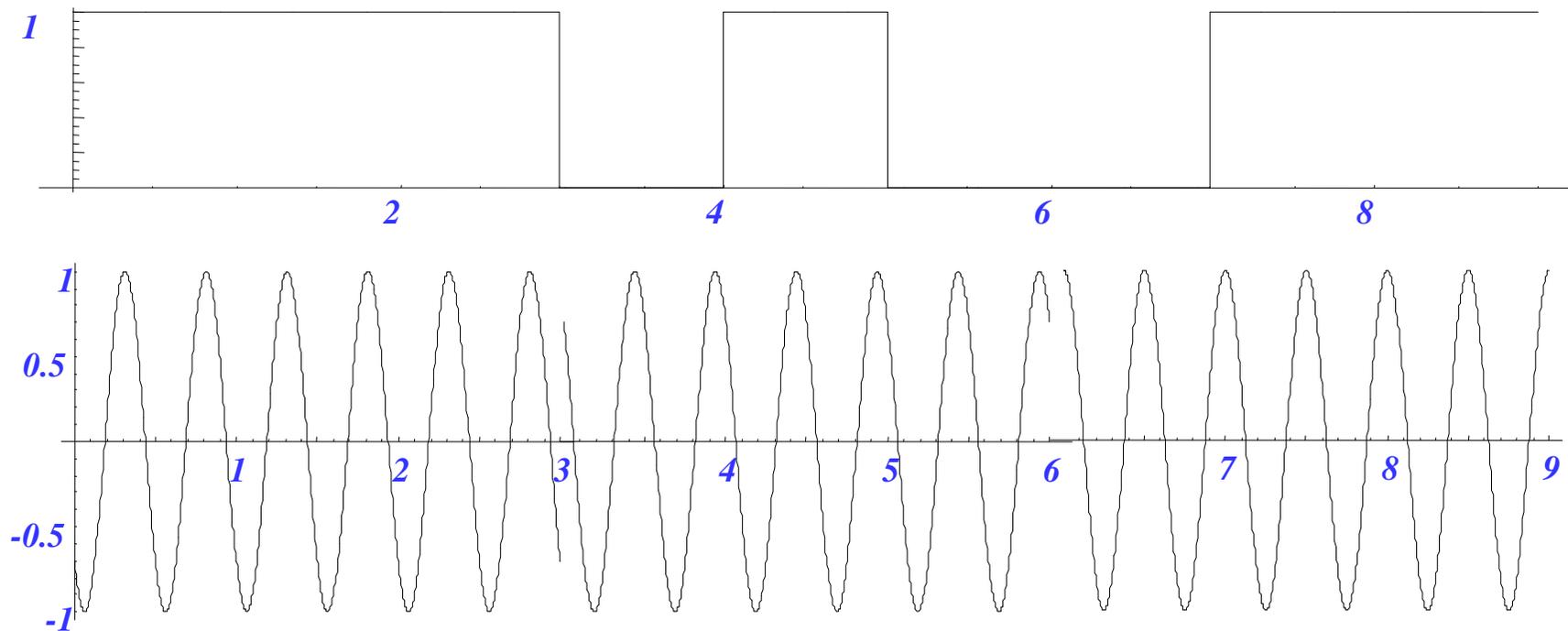
## 4 PSK - probabilità di errore di simbolo (bit)



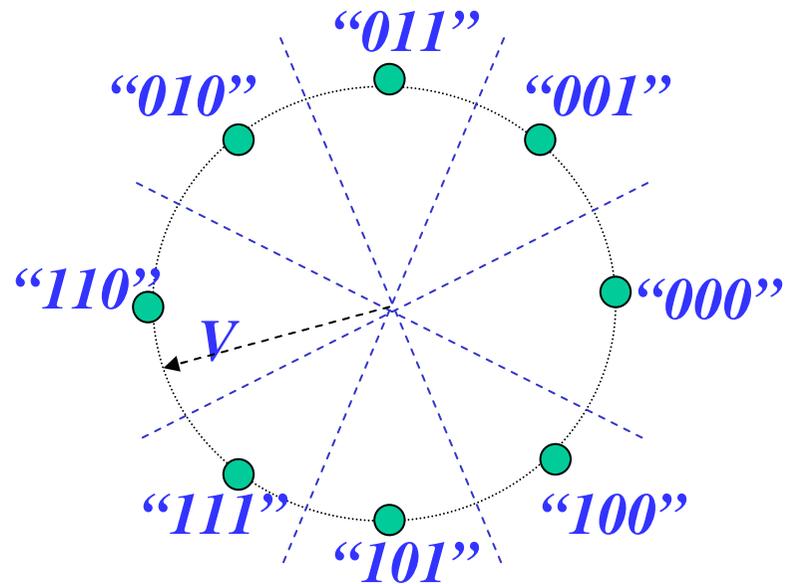
*La modulazione 4 PSK ha le stesse prestazioni in termini di  $E_b/n_0$  della modulazione 2 PSK, ma la banda in modulazione è la metà.*

## *Modulazione 8 PSK*

*000*  $\Rightarrow$  fase 0    *001*  $\Rightarrow$  fase  $\pi/4$     *011*  $\Rightarrow$  fase  $\pi/2$     *010*  $\Rightarrow$  fase  $3\pi/4$   
*110*  $\Rightarrow$  fase  $\pi$     *111*  $\Rightarrow$  fase  $5\pi/4$     *101*  $\Rightarrow$  fase  $3\pi/2$     *100*  $\Rightarrow$  fase  $7\pi/4$



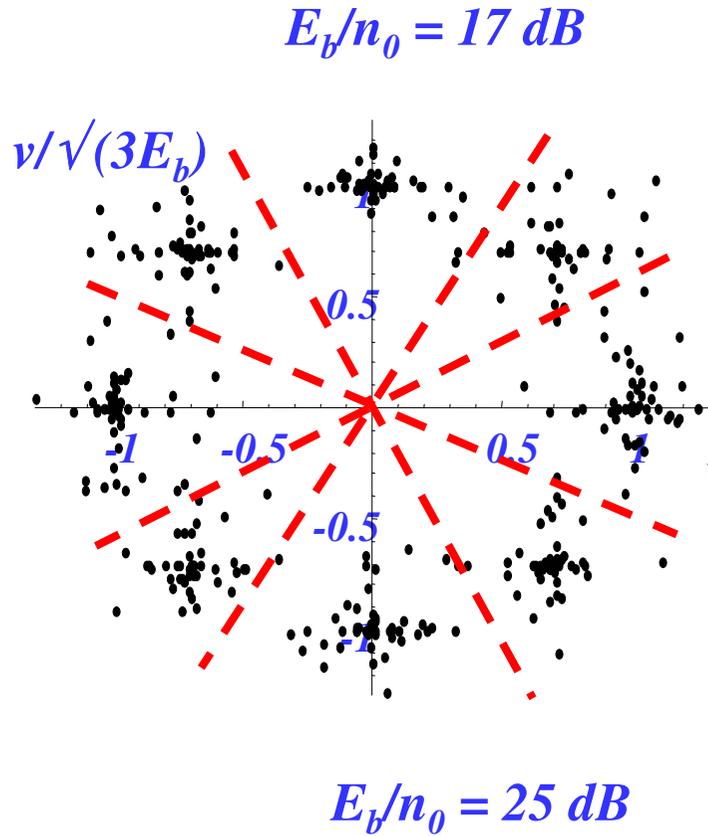
## Modulazione 8 PSK



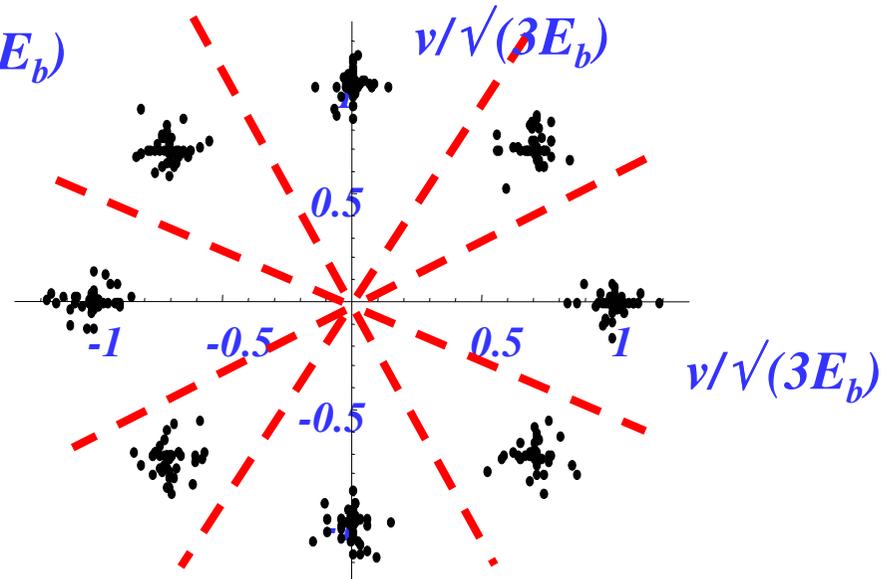
✓ Occupazione di banda  $B_{min} = 1/(3T_b) = f_b/3$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)

✓ Rapporto  $E_b/n_0$  @  $BER = 10^{-6} \approx 14.6$  dB (quindi la potenza necessaria in ricezione è  $\approx 2.5$  volte maggiore di quella necessaria con 2 o 4 PSK)

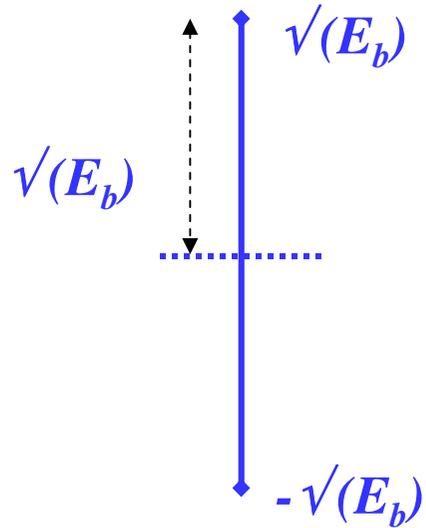
# Modulazione 8 PSK



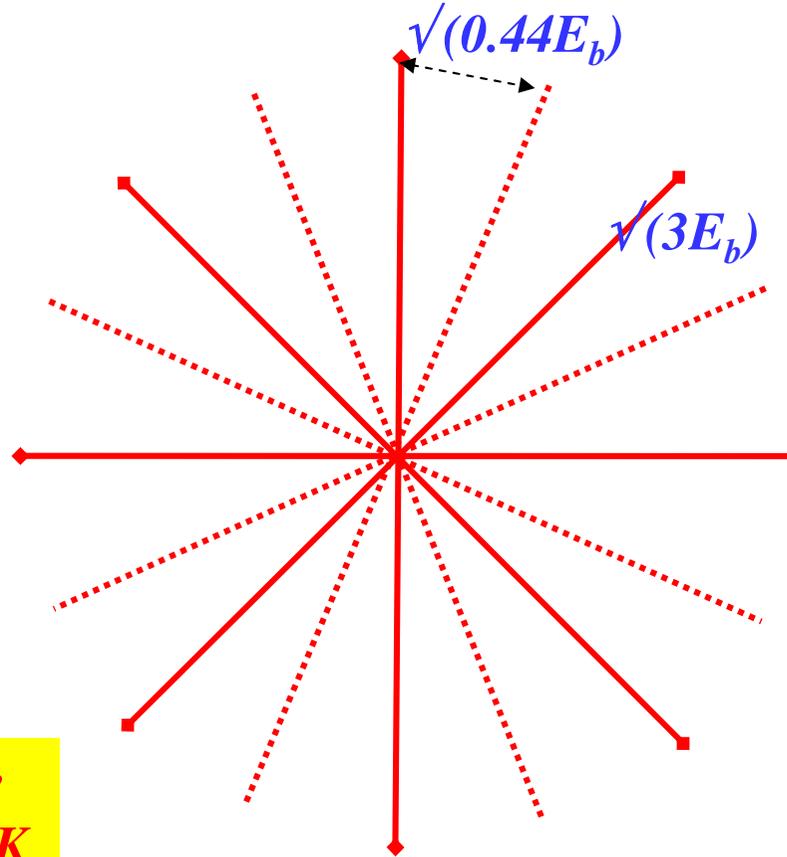
*E' abbastanza evidente, a parità di valore del rapporto segnale rumore, il peggioramento della modulazione 8 PSK rispetto alle modulazioni 2 PSK e 4 PSK*



# Modulazione 8 PSK



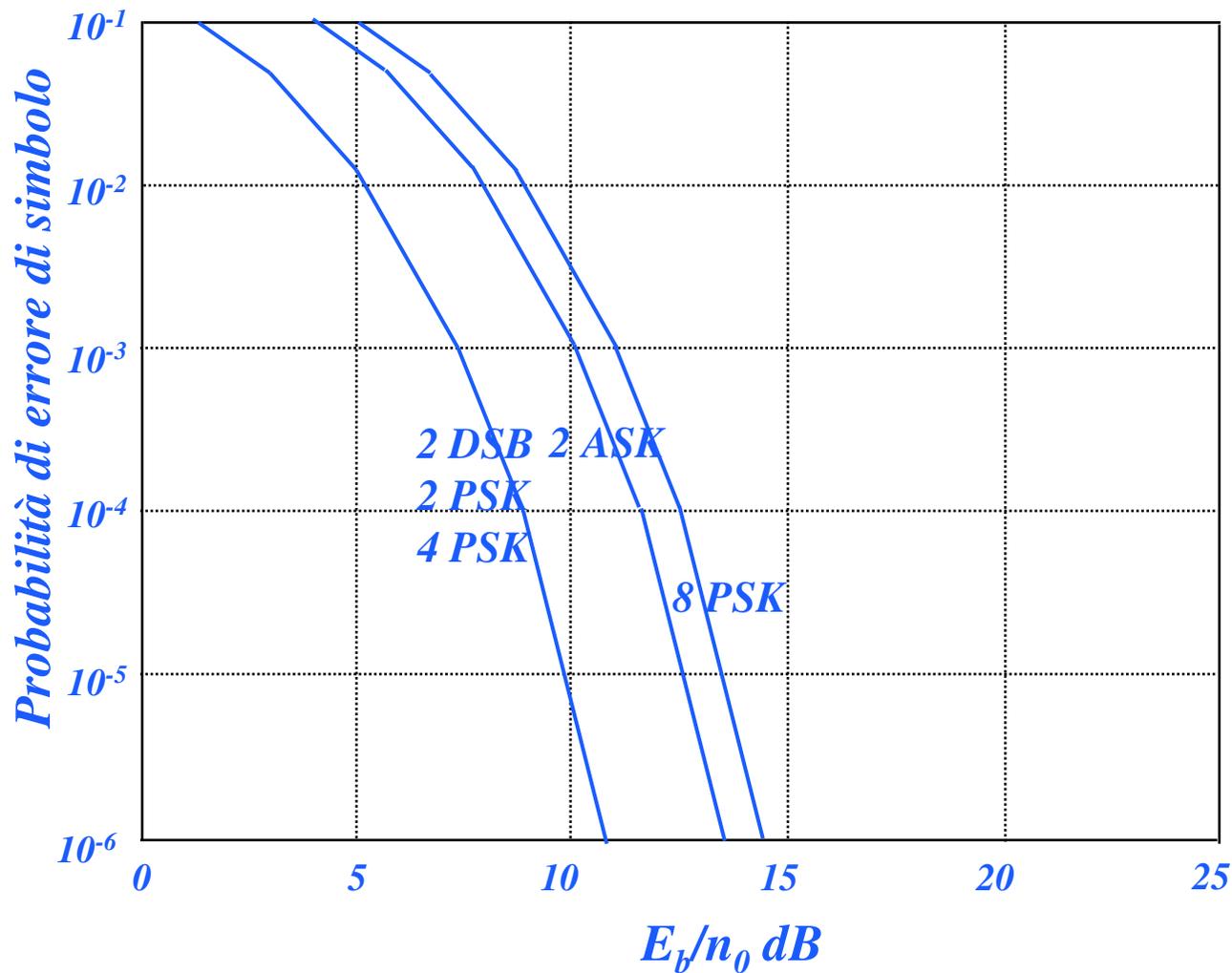
*Situazione in decisione  
nella modulazione 2 PSK*



*Situazione in decisione  
nella modulazione 8 PSK*

*La modulazione  
8 PSK richiede  
circa 4.1 dB in  
più per il valore  
di  $E_b/n_0$  rispetto  
alla  
modulazione 2  
PSK, ma la  
banda è 1/3.*

## 8 PSK - probabilità di errore di simbolo

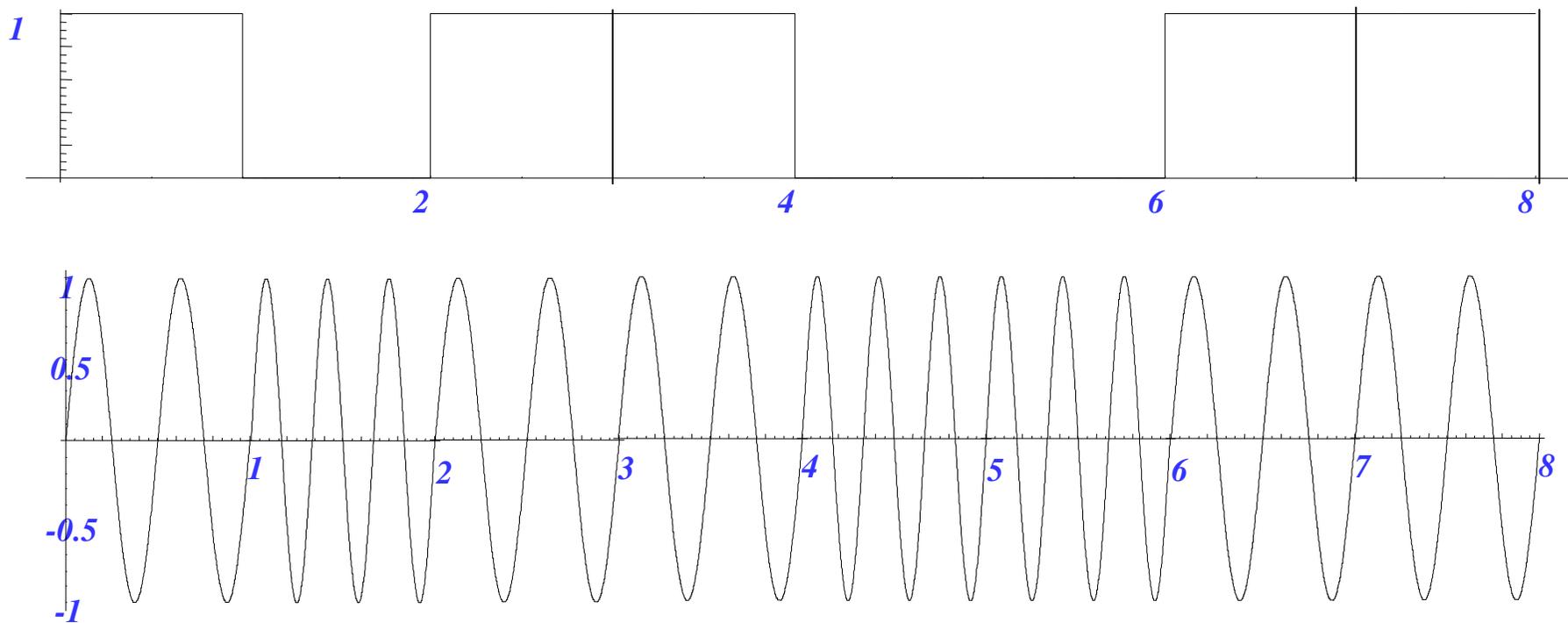


*La modulazione 8 PSK richiede circa 4.1 dB in più per il valore di  $E_b/n_0$  rispetto alla modulazione 2 PSK (una potenza 2.5 volte maggiore), ma la banda è 1/3.*

# *Modulazione FSK*

# Modulazione 2 FSK

Bit 0  $\Rightarrow$  frequenza  $f_0$     Bit 1  $\Rightarrow$  frequenza  $f_1$  ( $\Delta f = h/ 2T_b$ )



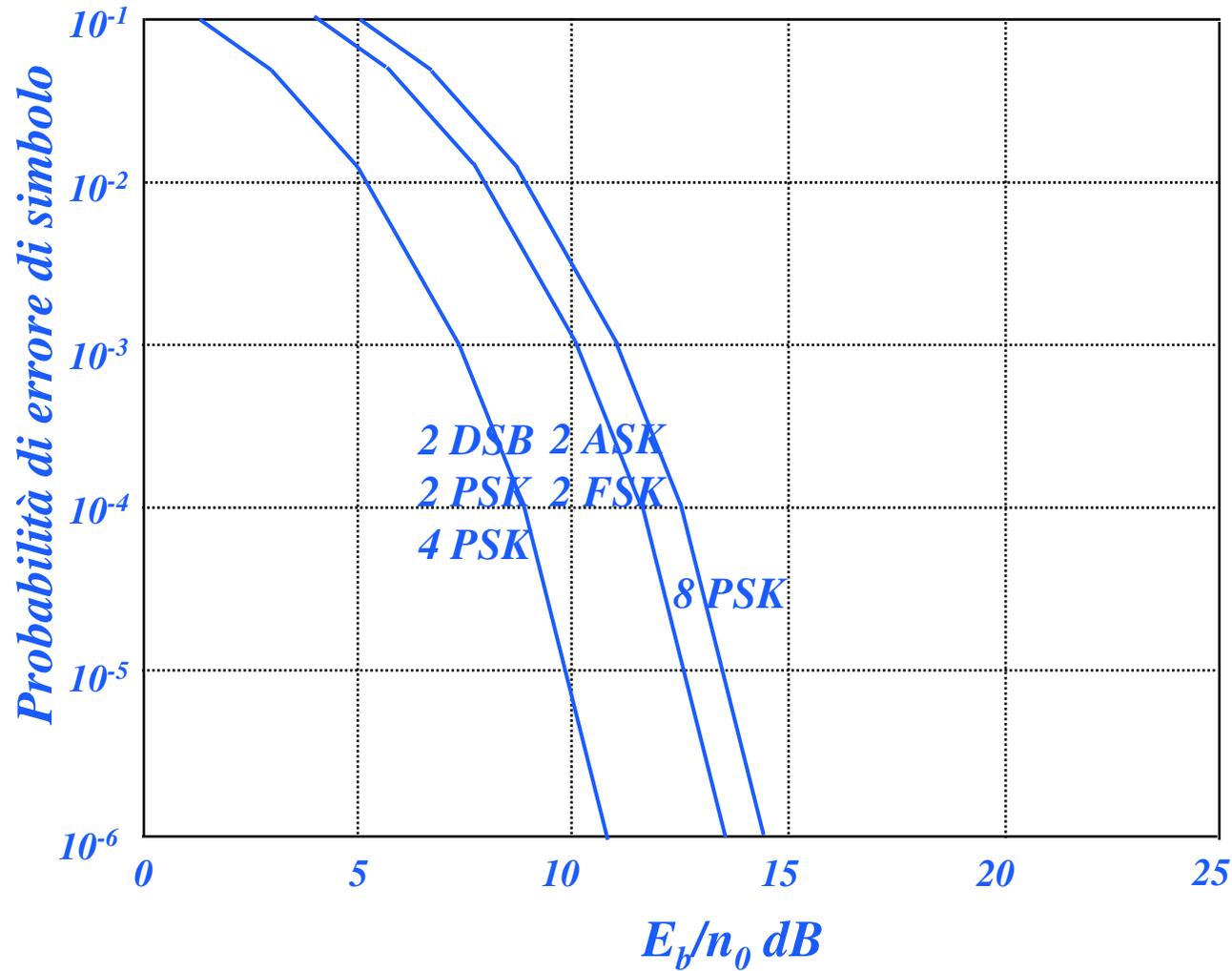
## *Modulazione 2 FSK*

✓ *Occupazione di banda  $B_{min} \approx 1.5/T_b = 1.5 f_b$  (per  $h = 0.5$  ; in pratica leggermente maggiore).*

✓ *Rapporto  $E_b/n_0$  @  $BER = 10^{-6} \approx 13.5$  dB (la banda è una volta e mezzo maggiore quella del 2 PSK,, la potenza necessaria in ricezione è 2 volte maggiore).*

*Per la sua semplicità, e per le prestazioni, tutto sommato, soddisfacenti, è stata ampiamente impiegata nei modem in banda fonica a bassa velocità*

## Modulazione 2 FSK



*La modulazione 2 FSK richiede 3dB per il valore di  $E_b/n_0$  rispetto alla modulazione 2 PSK (una potenza 2 volte maggiore), la banda è circa una 1.5 volte maggiore.*

# *Modulazione QAM*

## *Modulazione 16 QAM*

*La modulazione 16 QAM utilizza*

*✓ 3 diversi livelli di ampiezza e*

*✓ 12 diversi valori di fase*

*per rappresentare 16 possibili simboli, composti da 4 bit.*

<i>Bit</i>	<i>ampiezza</i>	<i>fase</i>	<i>Bit</i>	<i>ampiezza</i>	<i>fase</i>
<i>0000</i>	$3A\sqrt{5}$	$\pi/4$	<i>1100</i>	$A\sqrt{5}$	$5\pi/4$
<i>0001</i>	$A$	$0.4\pi$	<i>1101</i>	$A$	$1.1\pi$
<i>0011</i>	$A\sqrt{5}$	$\pi/4$	<i>1111</i>	$3A\sqrt{5}$	$5\pi/4$
<i>0010</i>	$A$	$0.1\pi$	<i>1110</i>	$A$	$1.4\pi$
<i>0100</i>	$A$	$0.6\pi$	<i>1000</i>	$A$	$1.6\pi$
<i>0101</i>	$3A\sqrt{5}$	$3\pi/4$	<i>1001</i>	$A\sqrt{5}$	$7\pi/4$
<i>0111</i>	$A$	$0.9\pi$	<i>1011</i>	$A$	$1.9\pi$
<i>0110</i>	$A\sqrt{5}$	$3/4\pi$	<i>1010</i>	$3A\sqrt{5}$	$7\pi/4$

# *Modulazione 16 QAM*

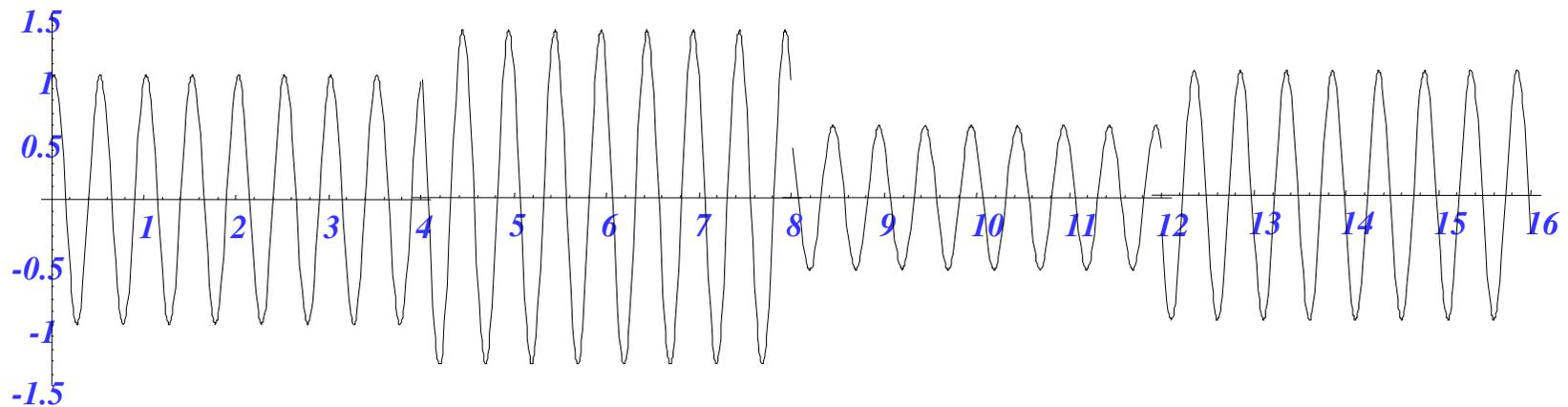
*0001      1      0.4  $\pi$*

*0101       $3/\sqrt{5}$        $3\pi/4$*

*0110       $1/\sqrt{5}$        $3\pi/4$*

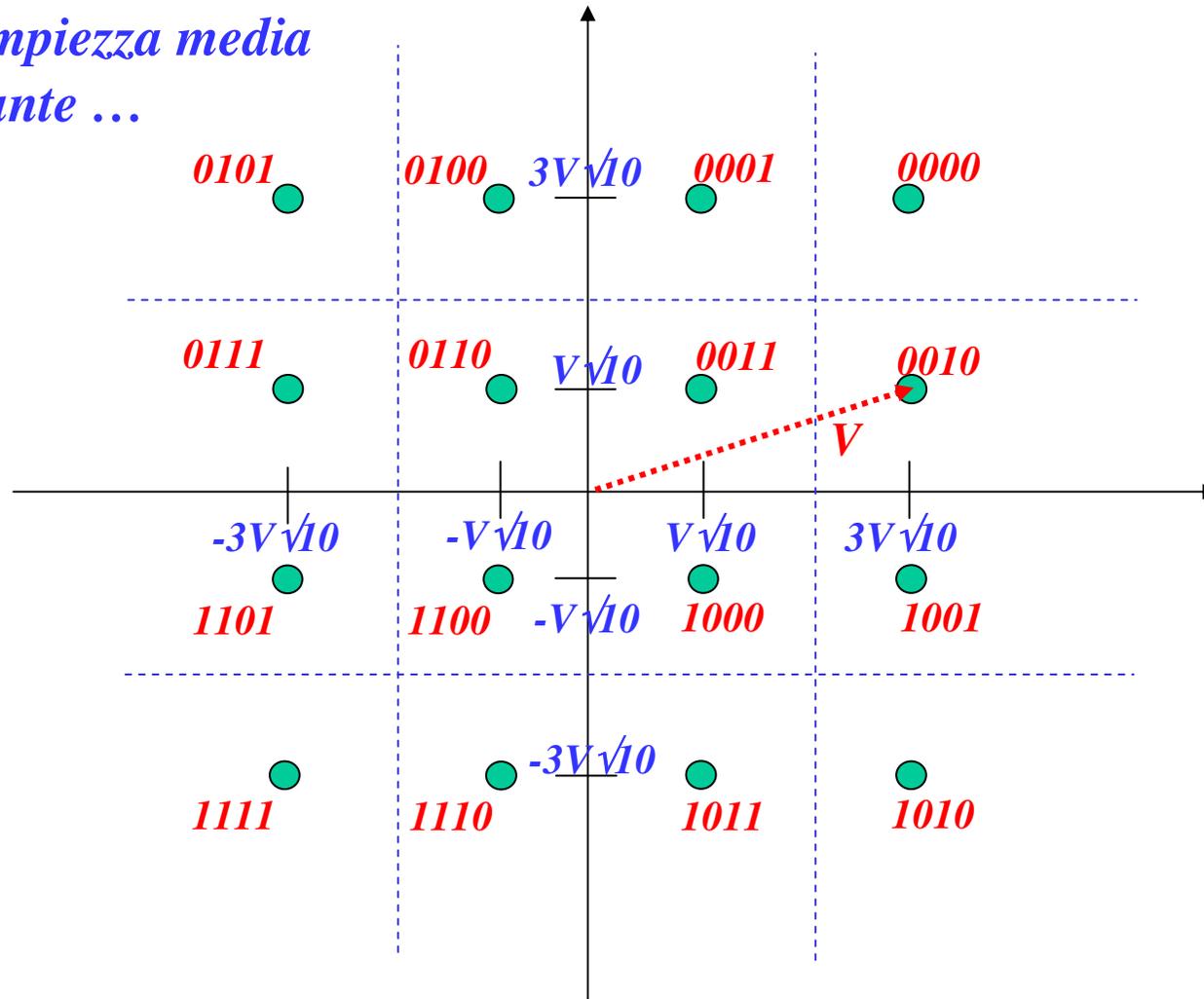
*0111      1       $1.1 \pi$*

*0   0   0   1   0   1   0   1   0   1   1   0   0   1   1   1*



# Modulazione 16 QAM

Se  $V$  é l'ampiezza media della portante ...



## *Modulazione 16 QAM*

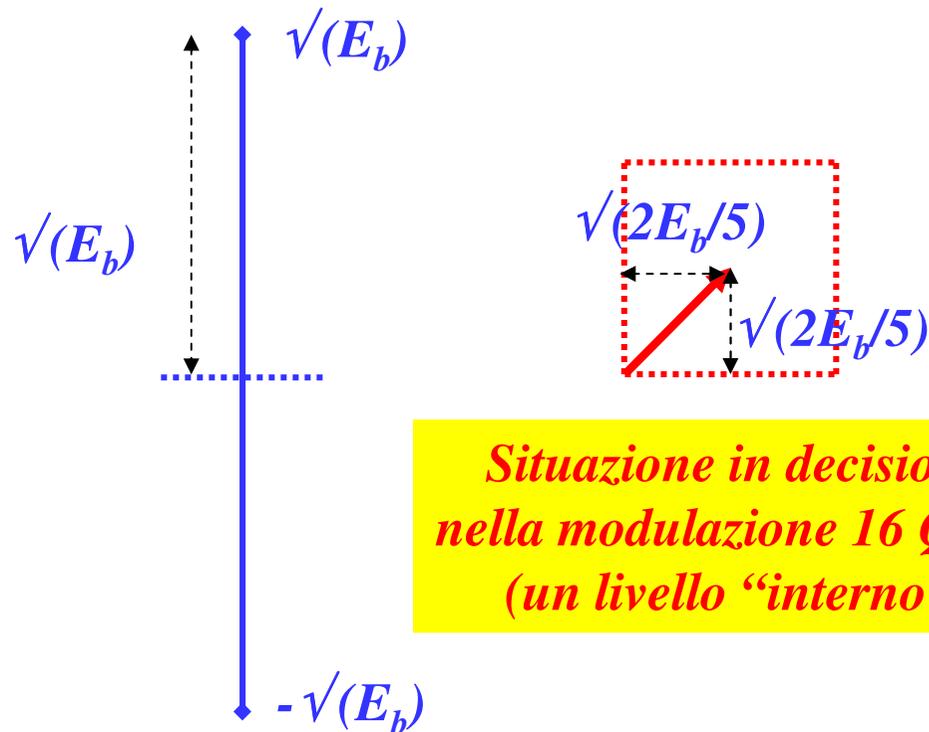
- ✓ *Occupazione di banda  $B_{min} = 1/(4T_b) = f_b/4$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore)*
- ✓ *Rapporto  $E_b/n_0$  @  $BER = 10^{-6} \approx 15$  dB (la banda è un quarto di quella del 2 PSK, la potenza necessaria in ricezione è 2.8 volte maggiore)*

➤ *Le modulazioni QAM (prevalentemente 16 QAM e 64 QAM) si utilizzano nei sistemi ove le bande in modulazione sono limitate, ma la potenza disponibile in ricezione sia relativamente alta, situazione tipica, ad esempio, dei ponti radio terrestri a microonde.*

➤ *In particolare, la 64 QAM ha 64 livelli, quindi 6 bit per simbolo trasmesso; la banda si riduce allora a  $B_{min} = 1/(6T_b) = f_b/6$  (in pratica 1.2 – 1.5 volte maggiore), la potenza necessaria in ricezione, rispetto al 2/4 PSK, è, però,  $\approx 8$  volte maggiore.*

3A

# Modulazione 16 QAM

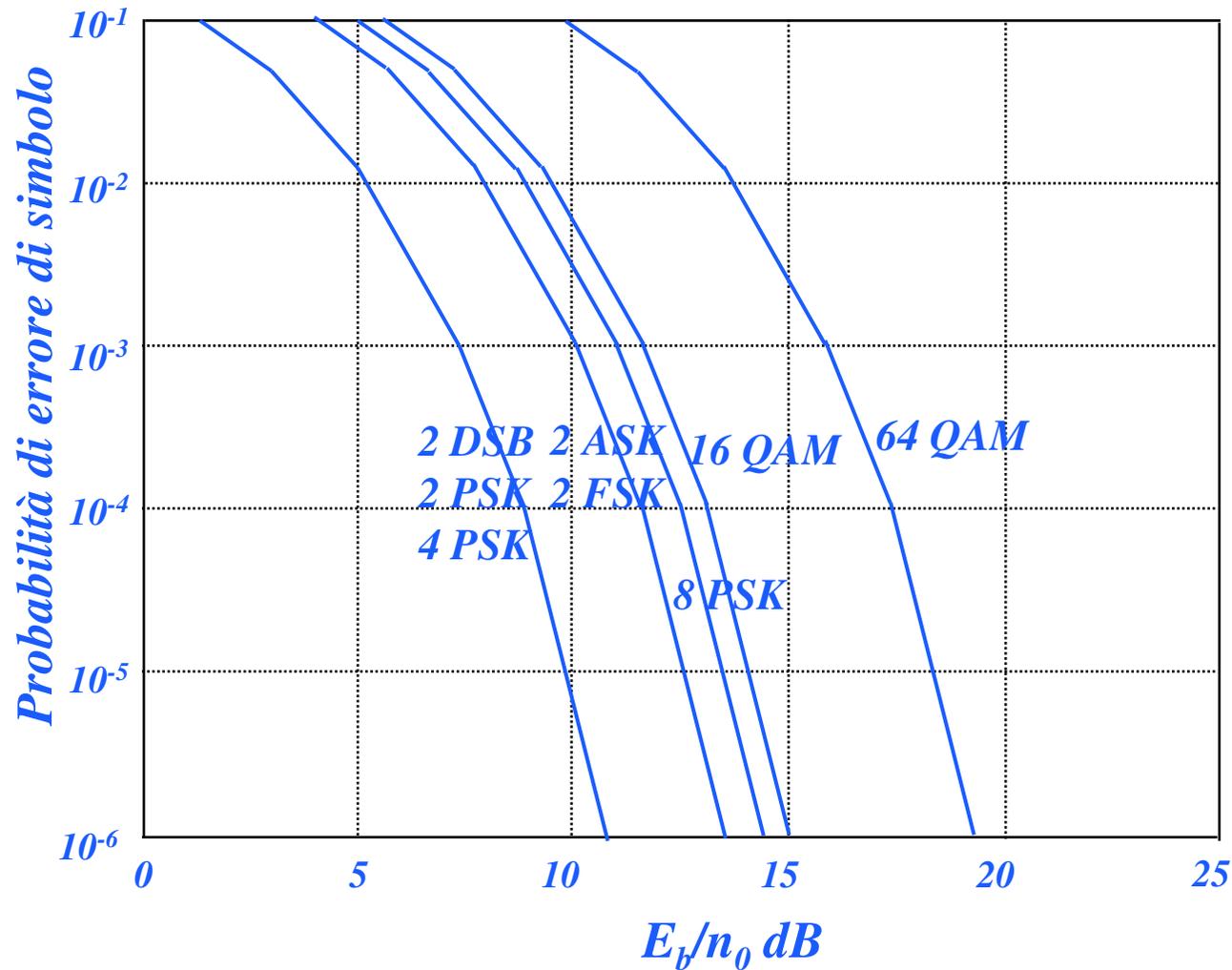


*Situazione in decisione  
nella modulazione 16 QAM  
(un livello “interno”)*

*Situazione in decisione  
nella modulazione 2 PSK*

*La modulazione 16 QAM richiede circa 4.5 dB per il valore di  $E_b/n_0$  rispetto alla modulazione 2 PSK (una potenza 2.8 volte maggiore), ma la banda è 1/4.*

## Modulazione 16 QAM e 64 QAM



La modulazione 16 (64) QAM richiede 3.5 dB (9 dB) in più per il valore di  $E_b/n_0$  rispetto alla modulazione 2 PSK, cioè una potenza 2.8 (8) volte maggiore, ma la banda è circa  $1/4$  ( $1/6$ ).